

Coherencia global inducida por ruido o diversidad en sistemas excitables



C.J. Tessone, A. Scirè, R. Toral, P. Colet

FisEs'05 Madrid, 27 de junio de 2005

<http://www.imedea.uib.es/PhysDept>

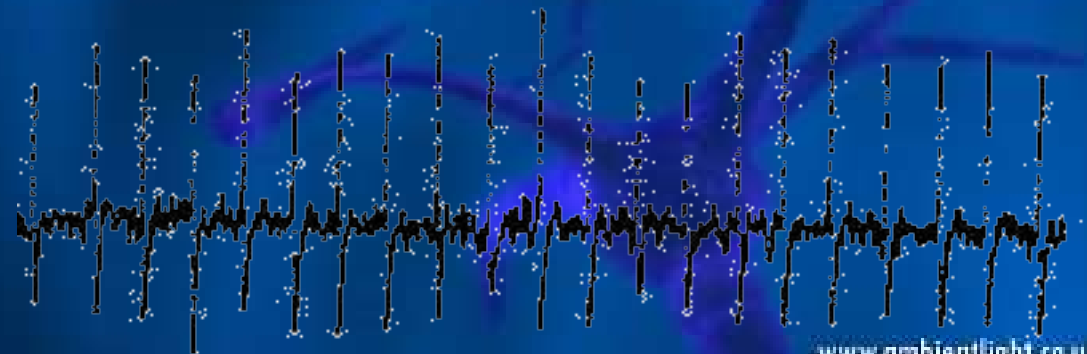
tessonec@imedea.uib.es

Introducción

- Definición de sistema excitable

Un sistema excitable es uno que permanece en una configuración estable en ausencia (o presencia de pequeñas) perturbaciones.

Si las perturbaciones son suficientemente fuertes, el sistema realiza una excursión en el espacio de las fases (en muchos casos independiente de la magnitud de la perturbación), volviendo al estado original de reposo.

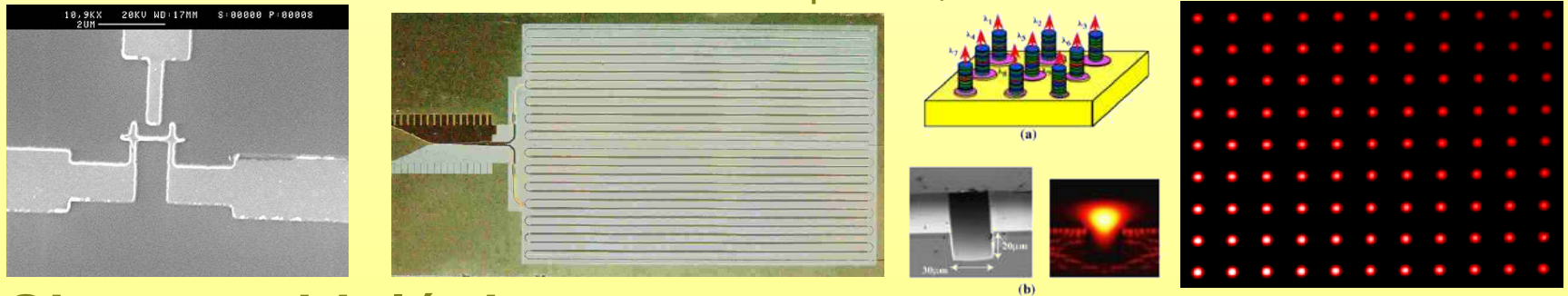


www.ambientlight.co.uk

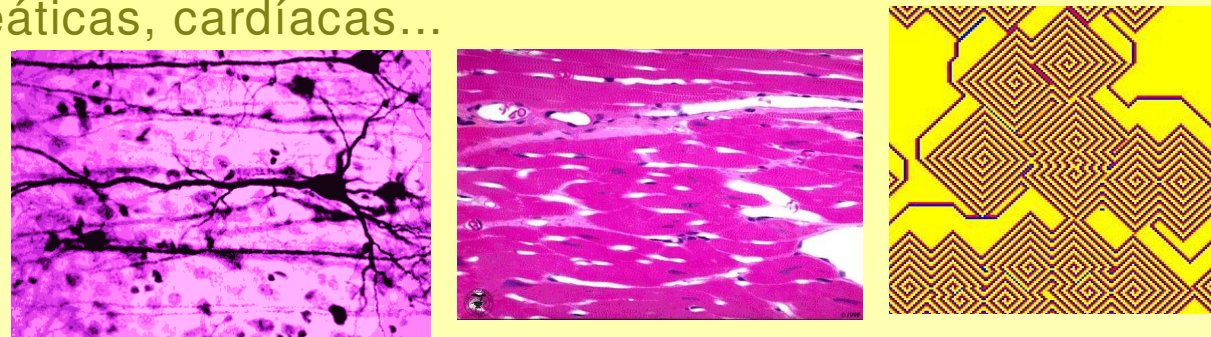
Introducción

• Ejemplos de sistemas excitables

Sistemas físicos: uniones Josephson, láseres



Sistemas biológicos: propagación de enfermedades, neuronas, células pancreáticas, cardíacas...



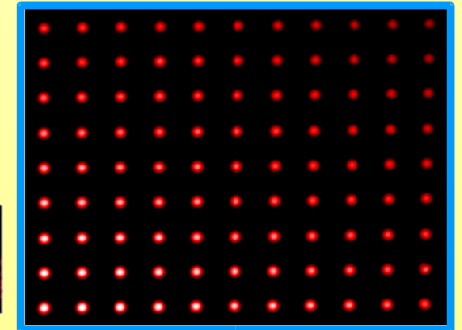
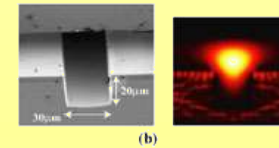
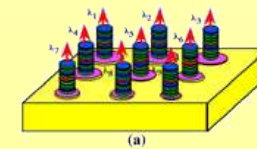
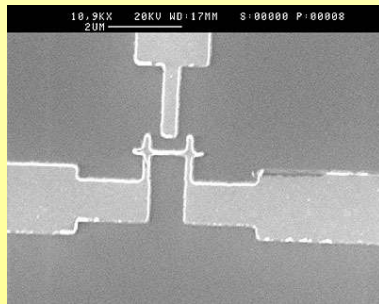
Sistemas químicos: reacción de Belousov-Zhabotinsky



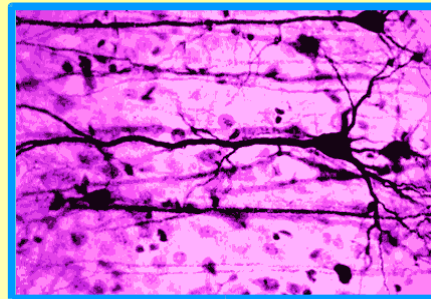
Introducción

• Ejemplos de sistemas excitables

Sistemas físicos: uniones Josephson, láseres



Sistemas biológicos: propagación de enfermedades, neuronas, células pancreáticas, cardíacas...



Sistemas químicos: reacción de Belousov-Zhabotinsky



Sistema estudiado

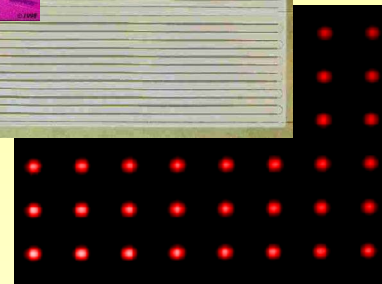
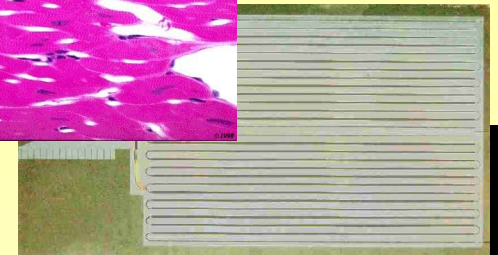
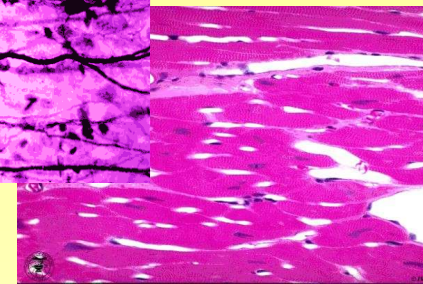
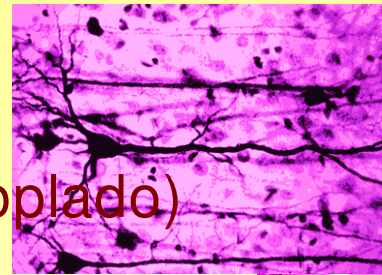
- Rotores activos globalmente acoplados

La dinámica de un rotor activo viene dado por:

$$\dot{\phi} = \omega - \sin(\phi) + \sqrt{D}\xi$$

Este sistema es útil para el modelado de:

- Dinámica neuronal
- Tejidos cardíacos (acoplado)
- Uniones Josephson
- Dinámica de láseres



Sistema estudiado

- Rotores activos globalmente acoplados

La dinámica de un rotor activo viene dado por:

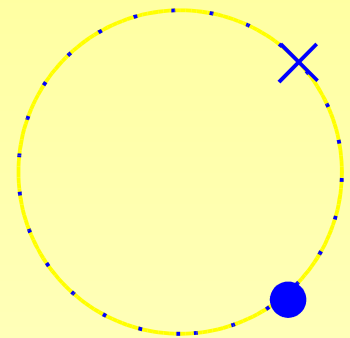
$$\dot{\phi} = \omega - \sin(\phi) + \sqrt{D}\xi$$

D es la intensidad de ruido

ω la frecuencia natural

$\omega < 1$ el sistema es excitable

$\omega \geq 1$ es oscilatorio



Sistema estudiado

- Rotores activos globalmente acoplados

$$\dot{\phi}_j = \omega_j - \sin \phi_j + \frac{C}{N} \sum_{k=1}^N \sin (\phi_k - \phi_j) + \sqrt{D} \xi_j$$

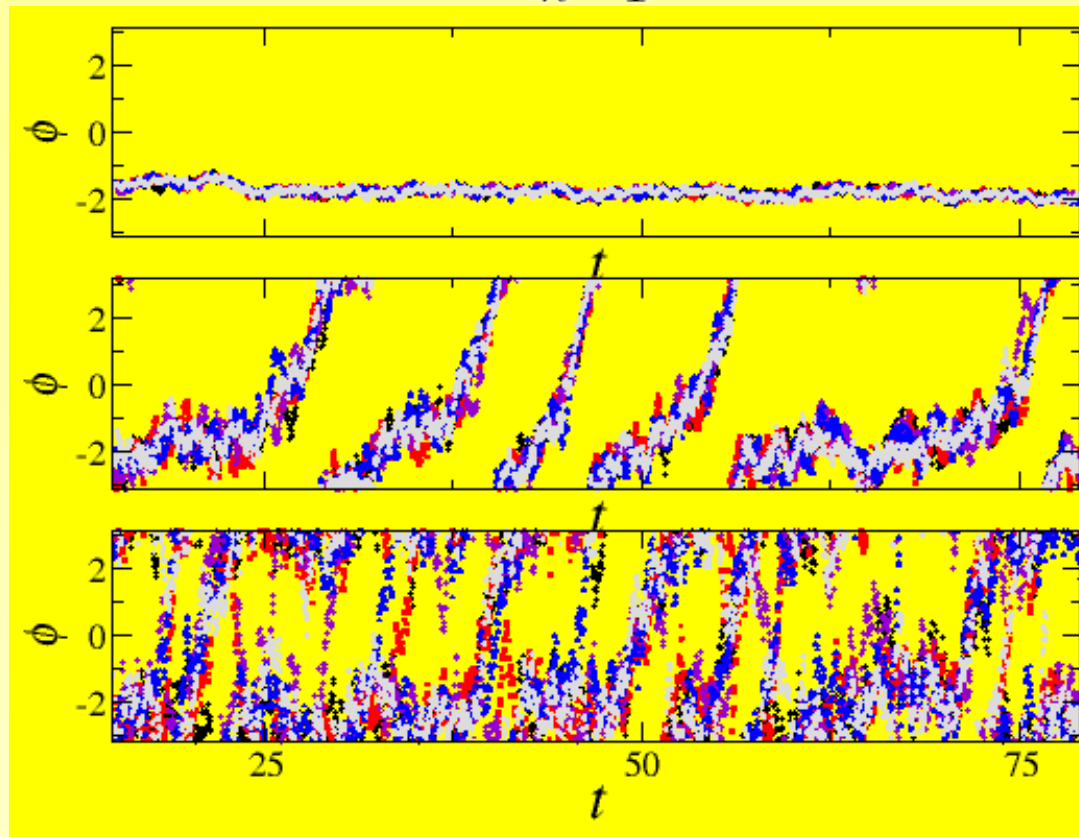
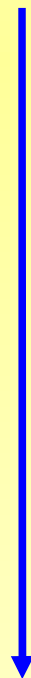
- N : el tamaño del sistema
- D : la intensidad de ruido $\langle \xi_j(t) \xi_k(t') \rangle = \delta(t - t') \delta_{jk}$
- C : la intensidad de acoplamiento
- ω_j : frecuencia natural del oscilador j distribuida de acuerdo a una distribución $g(\omega_j)$ de valor medio ω y desviación estándar σ^2

Sistema estudiado

- Rotores activos globalmente acoplados

$$\dot{\phi}_j = \omega_j - \sin \phi_j + \frac{C}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\phi_k - \phi_j) + \sqrt{D} \xi_j$$

aumenta D



I

II

III

Sistema estudiado

- Parámetros de orden

i) Kuramoto

Dada la expresión
$$\rho(t)e^{i\Psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\phi_k(t)}$$

se calcula el promedio temporal $\rho \equiv \langle \rho(t) \rangle$

- $\rho = 1$ cuando, durante la evolución temporal del sistema, *todas las unidades* tienen la misma fase: $\phi_j(t) = \phi_k(t), \forall j, k$
- Cuando todos los osciladores están uniformemente distribuidos en el círculo, $\rho \rightarrow 0$

Sistema estudiado

- Parámetros de orden

- ii) Shinomoto-Kuramoto

$$\zeta = \left\langle \left| \rho(t) e^{i\Psi(t)} - \langle \rho(t) e^{i\Psi(t)} \rangle \right| \right\rangle$$

- En el caso en que los osciladores están en reposo, es igual a 0.
- Cuando los osciladores pulsan incoherentemente, es igual a 0.
- En el caso de sincronización total con velocidad uniforme (y distinta de cero), es igual a 1.
- En el caso de pulsos coherentes, toma valores distintos de cero.

Sistema estudiado

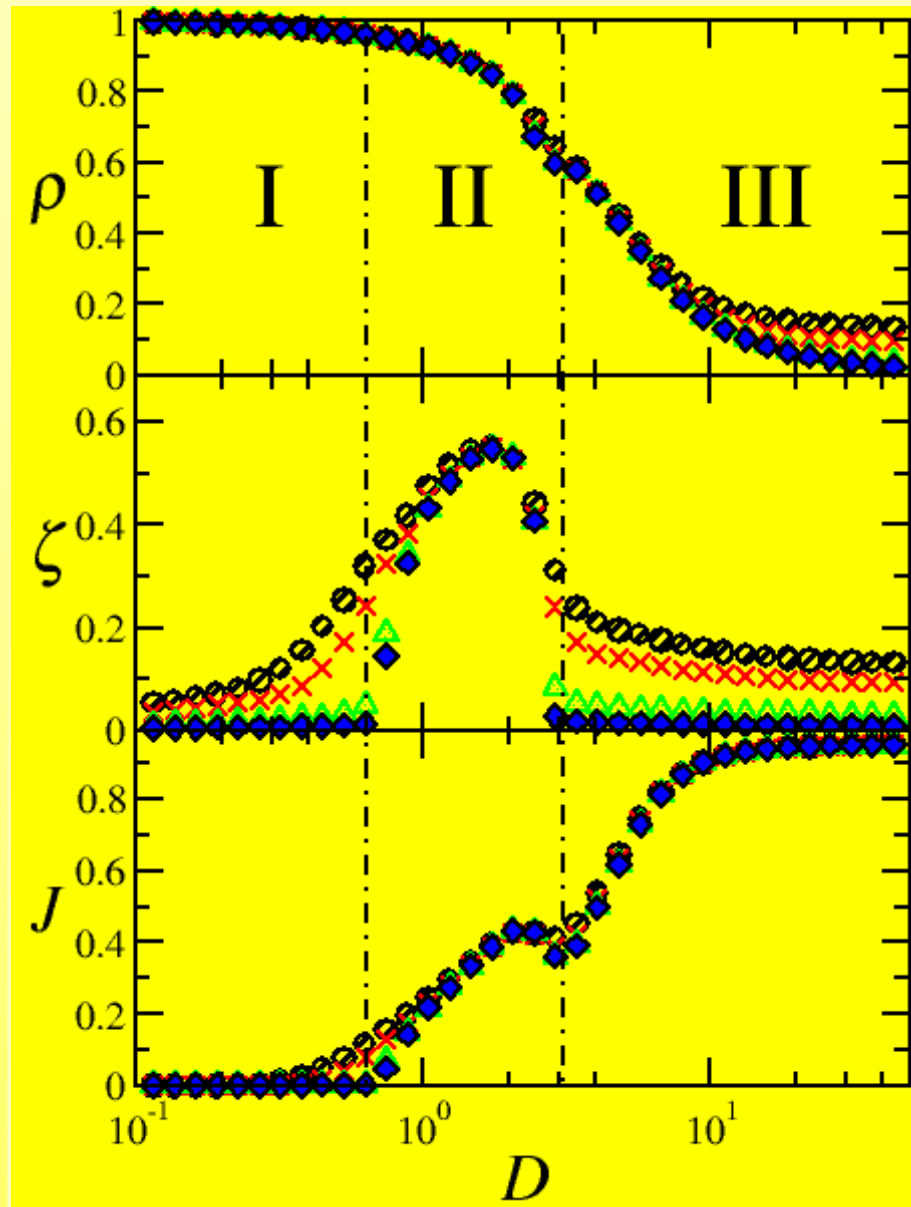
- Parámetros de orden

- iii) Corriente

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \dot{\phi}_k(t) \rangle$$

- Que sea igual a 0 significa que los osciladores están en reposo

Resultados numéricos

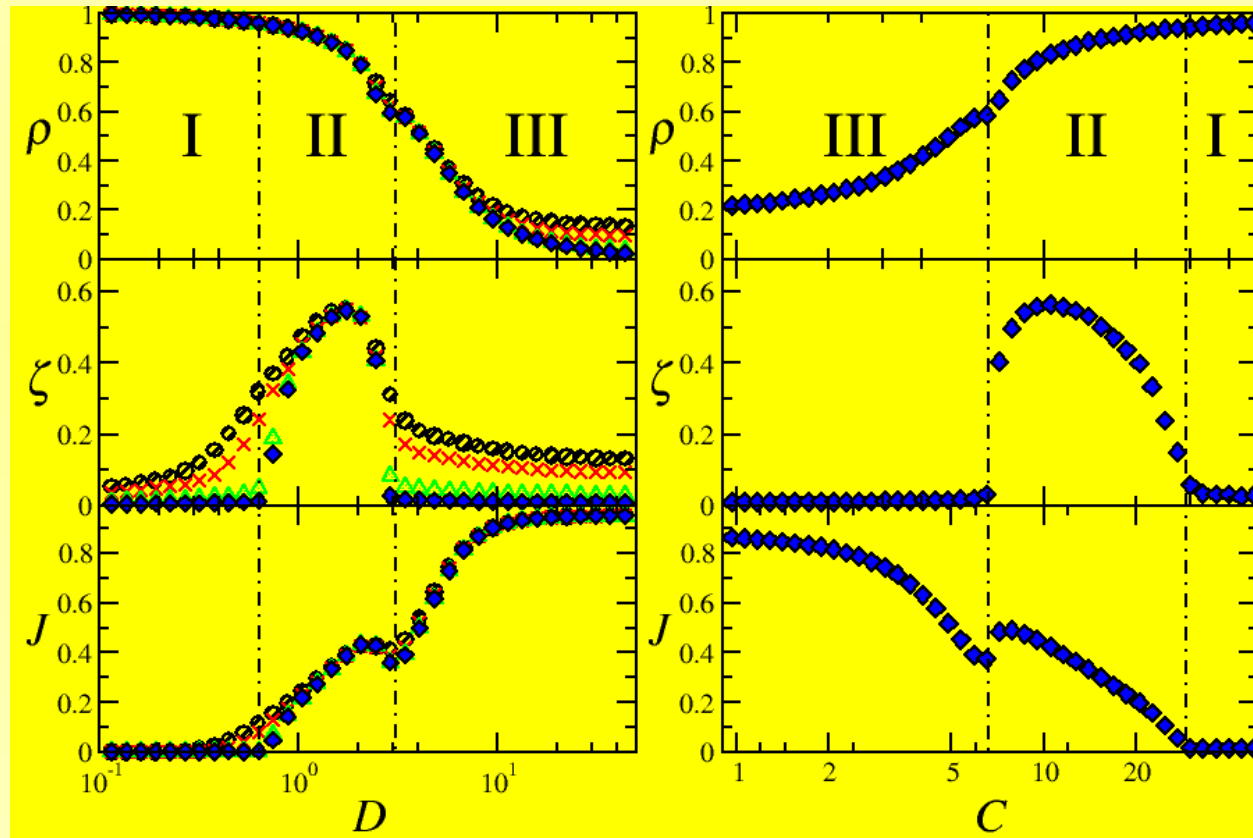


- Régimen **I**: los osciladores fluctúan alrededor del punto fijo
- Régimen **III**: los osciladores pulsán de manera incoherente
- Régimen **II**: los osciladores pulsán coherentemente

Los regímenes **I** y **III** tienen una distribución de probabilidad $P(\phi)$ estacionaria. *Pero la corriente es distinta en ambos regímenes*

Resultados numéricos

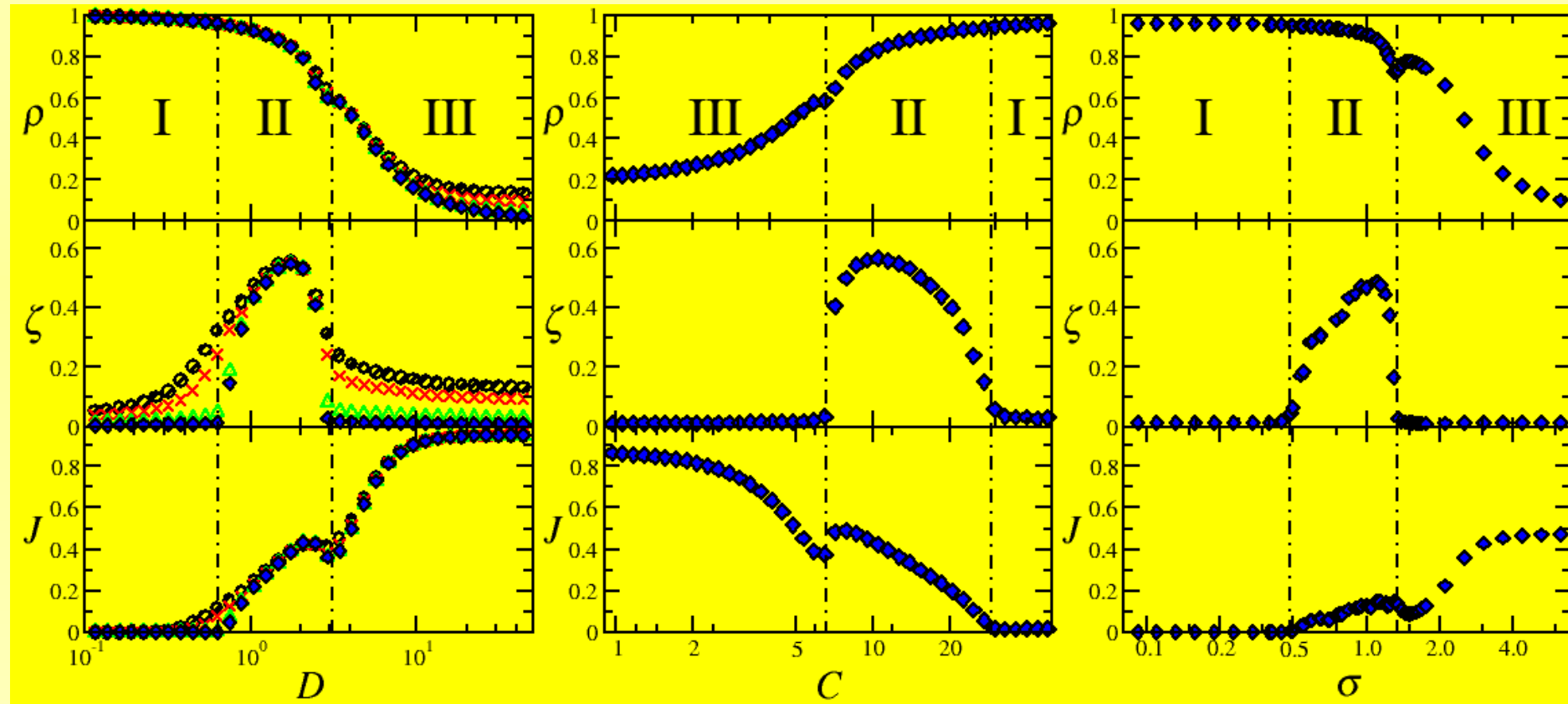
- Dependencia respecto de los parámetros



...aparecen los mismos regímenes...

Resultados numéricos

- Dependencia respecto de los parámetros



...aparecen los mismos regímenes...

Aproximación teórica

- Ecuación macroscópica

$$\dot{\phi}_j = \omega_j - \sin \phi_j + \frac{C}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\phi_k - \phi_j) + \sqrt{D} \xi_j$$

Promediando la ecuación dinámica sobre toda la población...

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{\phi}_j = \omega - \rho(t) \sin \Psi(t) + \sqrt{\frac{D}{N}} \xi(t), \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

... al calcular la derivada temporal del parámetro de orden de Kuramoto se obtiene...

$$\dot{\rho}(t) + i \rho(t) \dot{\Psi}(t) = \frac{i}{N} \sum_{k=1}^N \dot{\phi}_k e^{i\delta_k(t)} \quad \text{donde, } \delta_j(t) = \phi_j(t) - \Psi(t).$$

...se obtiene la ecuación dinámica para la fase global...

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{\omega}{\rho} - \sin \Psi(t), \quad \dot{\rho}(t) = \mathcal{O}(\delta_k^2)$$

Aproximación teórica

- Ecuación macroscópica

$$\dot{\Psi}(t) = \frac{\omega}{\rho} - \sin \Psi(t).$$

- La dinámica de la fase global es también excitable, *pero la frecuencia natural del sistema queda reescalada por ρ*
- El umbral de excitabilidad para el sistema global es $\rho = \omega$
- ***El desorden en la posición*** de los osciladores es responsable de la aparición de pulsos globales

Aproximación teórica

- Evaluación de ρ

$$\rho = \int d\omega g(\omega) \int_0^{2\pi} d\Psi P(\Psi; \rho) \int_0^{2\pi} d\phi P_{\text{st}}(\phi; \Psi, \rho, \omega) \cos(\phi - \Psi)$$

- sobre la distribución de probabilidad $g(\omega)$
- sobre la distribución de la fase global

$$P(\Psi; \rho) = \begin{cases} (1/2\pi) \sqrt{\omega^2 - \rho^2} / (\omega - \rho \sin \Psi) & \rho < \omega \\ \delta(\Psi - \arcsin(\omega/\rho)) & \rho \geq \omega \end{cases}$$

- sobre la distribución de fases en las unidades

$$P_{\text{st}}(\phi; \Psi, \rho, \omega) = Z^{-1} e^{-2V(\phi)/D} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{2V(\phi'+\phi)/D}$$

donde... $V(\phi; \Psi, \rho, \omega) = -\omega\phi - \cos(\phi) - C\rho \cos(\Psi - \phi)$

Aproximación teórica

- Cálculo de los parámetros de orden

En esta aproximación se puede calcular el parámetro de orden de Shinomoto-Kuramoto

$$\zeta = \frac{2}{\pi} \sqrt{2(\omega - \sqrt{\omega^2 - \rho^2})(\omega + \rho)} K \left(\frac{2\rho}{\rho - \omega} \right)$$

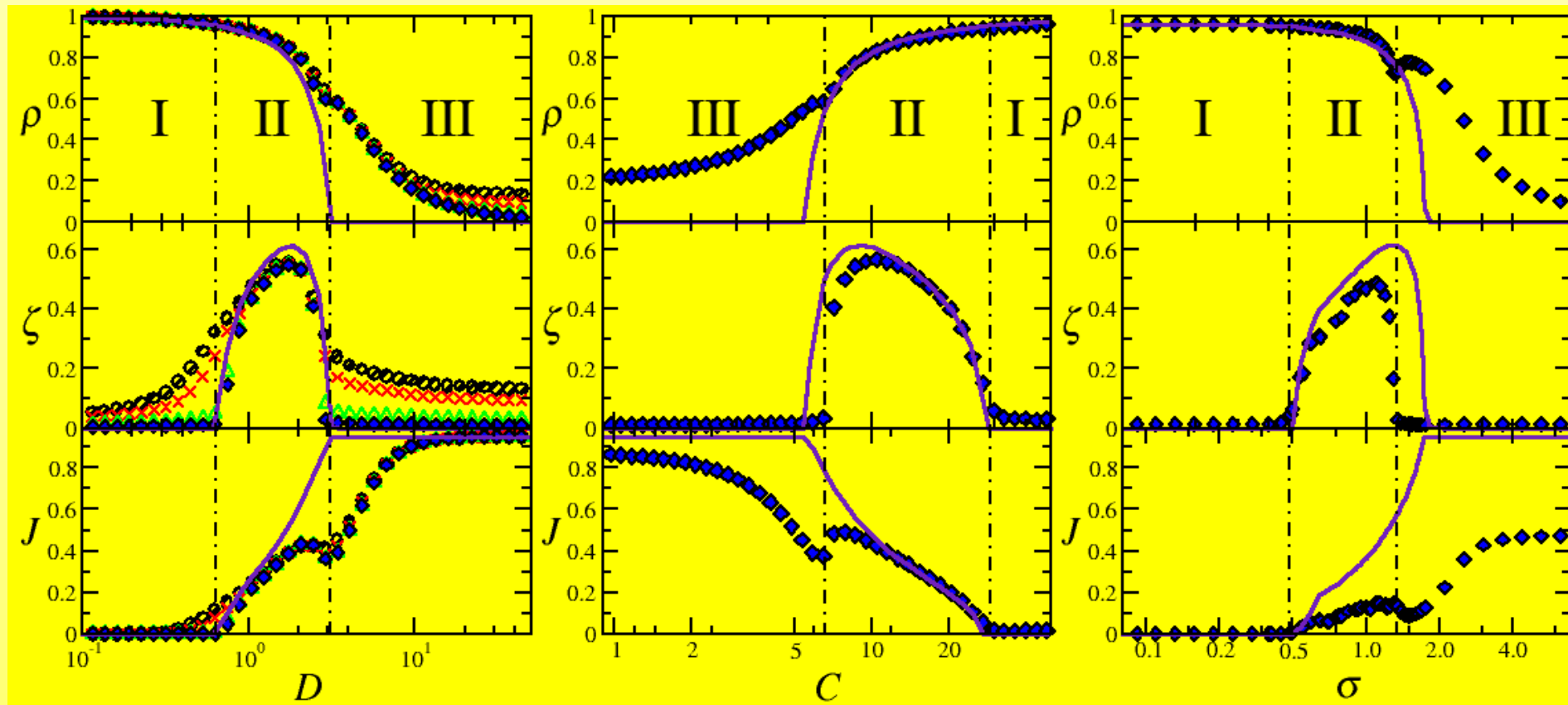
Y la corriente...

$$J = \frac{\omega^2 - \rho^2}{T} \int_0^T \frac{dt}{\omega - \rho \cos \Omega t} = \sqrt{\omega^2 - \rho^2}.$$

donde $\Omega = \sqrt{(\omega/\rho)^2 - 1}$

Aproximación teórica

- Comparación con resultados numéricos



Conclusiones

- Hemos estudiado el efecto que **ruido**, **acoplamiento** y **diversidad** tienen en la aparición de oscilaciones colectivas en un conjunto de rotores activos
- En este sistema aparecen tres regímenes dinámicos: fluctuaciones alrededor del punto fijo, pulsos coherentes y pulsos incoherentes
- Hemos desarrollado una teoría simple que da cuenta de estos regímenes y brinda expresiones para los parámetros de orden que caracterizan este sistemas
- Se ha demostrado que un aumento en el desorden de las posiciones tiene el efecto de provocar pulsos coherentes.
- Esta aumento en el desorden de las posiciones puede ser producida aumentando el ruido, la diversidad en las frecuencias naturales, o disminuyendo el acoplamiento