EESTI FÜÜSIKA SELTS

EESTI FÜÜSIKA SELTSI AASTARAAMAT

2009

XX

aastakäik

TARTU 2010

DIFUSIOONIST JÕUVÄLJADES

ELS HEINSALU

Keemilise ja Bioloogilise Füüsika Instituut, Tallinn,
ja IFISC, Instituto de Física Interdisciplinar y Sistemas
Complejos (CSIC-UIB), Palma de Mallorca, Hispaania

1. SISSEJUHATUS

Saksa füsioloog Adolf Fick, kes huvitus sellest, kuidas toimub elusorganismides vee ning toitainete liikumine läbi membraanide, publitseeris 1855. aastal seadused, mida tänapäeval tuntakse Ficki difusiooni seadustena [1, 2]. Ta näitas seejuures, et difundeeruva objekti ruutkeskmine koordinaat kasvab ajas lineaarselt. Ficki probleemikäsitlus oli puhtalt fenomenoloogiline, baseerudes analoogiale Fourier' võrrandiga. Möödus 50 aastat, kuni Einstein tuletas difusioonivõrrandi molekulaar-kineetilisest teooriast [3, 4]. Marian von Smoluchowski, kes töötas Browni liikumise probleemi kallal alates 1900. aastast, kuid ei publitseerinud midagi kuni 1906. aastani, jõudis vaba difusiooni jaoks põhimõtteliselt samade tulemusteni nagu Einstein [5]. Erinevalt Einsteinist käsitles Smoluchowski kohe ka eksperimenditulemusi, sidudes omavahel difusiooniteooria ning Browni liikumise nähtuse.

Lihtsaim mudel kirjeldamaks difusiooni on uitliikumise mudel. Termin „uitliikumine" pärineb Karl Pearsoni poolt 1905. aastal ajakirjale *Nature* saadetud kirjast *Uitliikumise probleem* [6]. Sarnased mudelid olid aga välja pakutud juba aastal 1880 Lord Rayleigh' poolt seoses isoperioodiliste vibratsioonidega ning Louis Bachelier' poolt aastal 1900 aktsiaturu fluktuatsioonide analüüsis [7–9]. Kui difusioonivõrrand kirjeldab pidevate suuruste hajumist, siis uitliikumine kirjeldab diskreetset difusiooni. Bachelier oli esimene, kes nägi seost diskreetse uitliikumise ning pideva difusioonivõrrandi vahel.

Einsteini difusioonimudel ning uitliikumine baseeruvad mõlemad samadel eeldustel: eksisteerib keskmine vaba tee pikkus (sammu pikkus uitliikumise korral ja vahemaa põrgete vahel Einsteini mudeli korral) ning keskmine aeg (hüppe sooritamiseks uitliikumise mudelis ja

põrgetevaheline aeg Einsteini mudelis); sealjuures osakesed ei interakteeru omavahel. Seega ruumis pideval piirjuhul viib uitliikumine samadele tulemustele nagu Einsteini poolt vaadeldud mudelis. Paljudes süsteemides aga ei pea need eeldused paika ning leiab aset anomaalne difusioon, s.t vabalt difundeeruva osakese ruutkeskmine koordinaat ei kasva ajas lineaarselt, vaid kui t^{α}, $\alpha \neq 1$ [10]. Sõltuvalt anomaalse difusiooni eksponendi α väärtusest on liikumine kas subdifuusne, s.t aeglasem kui normaalne difusioon $(0<\alpha<1)$, või superdifuusne, s.t kiirem kui normaalne difusioon $(\alpha>1)$ [11].

Anomaalse difusiooni nähtust teatakse juba alates turbulentse difusiooni käsitlusest Richardsoni poolt aastal 1926 [12]. Transpordi teooria raames on seda uuritud alates 1960ndate lõpust. 1970ndate alguses tehtud eksperimendid näitasid, et laengukandjate liikumine amorfsetes pooljuhtides – oluline koopiamasinate ja laserprinterite funktsioneerimisel – ei ole kirjeldatav klassikalise difusioonivõrrandi kaudu. Eksperimendiandmetega kooskõlalise teooria pakkusid välja 1975. aastal Scher ja Montroll. Vastavalt sellele lõksustatakse laengukandjad amorfses keskkonnas lokaalsete defektide poolt; vabanemine toimub mõne aja pärast tänu termilistele fluktuatsioonidele. Lõksustatuse ajad on kirjeldatavad jaotusega, mille keskmine väärtus on lõpmatu. Säärane idee ei leidnud kergesti heakskiitu, kuna tolleaegsete teadlaste maailmapilti ei mahtunud, et jaotus, millel puudub lõplik keskväärtus, võiks omada füüsikalist tähendust.

Nüüdseks on anomaalset dünaamikat omavate süsteemide loetelu üsnagi pikaks kujunenud. Lisaks laengukandjate liikumisele amorfsetes pooljuhtides on subdifuusse transpordi näideteks klaasid, tuumamagnetresonants, difusioon perkolatiivsetes ning poorsetes süsteemides, transport fraktaalsetel geomeetriatel, tilga dünaamika polümeerses võrgustikus ja DNA lahti pakkimine [11, 13–16]. Superdifusioon või Lévy statistika leiab lisaks Richardsoni turbulentsele difusioonile aset ka pöörlevate voolude teatud domeenides, kollektiivse libiseva difusiooni korral tahkiste pindadel, kihilistes kiiruste väljades, kvantoptikas, ühe molekuli spektroskoopias, transpordil turbulentses plasmas ja bakterite liikumise korral (vt artiklid [11, 13] ja viited seal). Anomaalne difusioon on oluline veel mitmete teistegi probleemide jaoks füüsikas ja keemias, eeskätt elektrokeemias, geo- ja keskkonnafüüsikas, bioloogias ja mikrobioloogias, meditsiinis, rahanduses ja majanduses, majandusfüüsikas; see on iseloomulik enamikele kompleksüsteemidele.

Transpordi anomaalne iseloom erinevates süsteemides võib olla tingitud väga erinevate mehhanismide poolt [10]; näiteks mittehomogeense keskkonna või osakestevahelise interaktsiooni tõttu. Ka Browni liikumise korral nn kammisarnastel struktuuridel lõpmata kõrgete ning lõpmata kitsaste piidega on leitud, et transport on subdifuusne eksponendiga $\alpha = 0{,}5$. Anomaalne difusioon võib ilmneda ka mõningates Lorentzi gaasides. Näiteks Sinai piljardi korral eksisteerivad piiramatult pikad rajad, mida mööda osake võib ilma põrgeteta vabalt liikuda; tulemuseks on ruutkeskmise koordinaadi käitumine $\langle \delta x^2(t) \rangle \sim t \ln t$ (eriline anomaalse difusiooni juht). Eksisteerivad ka lõplike horisontidega piljardid, kus järjestikuste hüpete komplekssete kaugmõjuliste korrelatsioonide tõttu difusioon on sellegipoolest anomaalne. Sageli on anomaalse käitumisega transpordinähtused dünaamilistes Hamiltoni süsteemides, kuna vastav faasiruum võib sisaldada mõningaid regulaarseid struktuure, mis toimivad nagu dünaamilised lõksud. Anomaalne difusioon on iseloomulik ka siirdeefektidele.

2. MATEMAATILISED MUDELID

2.1 NORMAALNE DIFUSIOON: UITLIIKUMINE JA FOKKERI-PLANCKI VÕRRAND

Nagu mainitud, on normaalne difusioon lisaks paljudele teistele matemaatilistele mudelitele kirjeldatav uitliikumise mudeli kaudu. Uurides ühedimensionaalset uitliikumist, kus uitleja sooritab hüppeid konstantse pikkusega Δx, võime sisse tuua võre mõiste $\{x_i = i\Delta x\}$, kus $i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Eeldame, et igas ajaühikus osake kohal i hüppab kohale $i \pm 1$ tõenäosusega $q_i^{\pm}$; $q_i^{+} + q_i^{-} = 1$. Säärane uitliikumine vastab ülesumbunud liikumisele (s.t inertsiefektid võib jätta arvesse võtmata) – iseloomulik enamikule bioloogilistest süsteemidest – ning on kirjeldatav kineetika põhivõrrandiga kohapopulatsiooni $P_i(t)$ jaoks [17, 18]

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i(t) = g_{i-1}^{+} P_{i-1}(t) + g_{i+1}^{-} P_{i+1}(t) - (g_i^{+} + g_i^{-}) P_i(t); \qquad (1)$$

$\sum_i P_i(t) = 1$. Kaks esimest liiget võrrandi (1) paremal poolel kirjeldavad P_i kasvu tänu siiretele kohalt $i \pm 1$ kohale i ning viimane liige kahanemist siirete tõttu punktist i punkti $i \pm 1$, s.t kineetika põhivõrrand on kasvu-kahanemise võrrand erinevate punktide i tõenäosuste jaoks. Suurused $g_i^{\pm}$ on vastavalt kiirused (sagedused) edaspidiseks ning tagaspidiseks liikumiseks. Uitliikumine, mis on kirjeldatav kineetika põhivõrrandiga (1), on Markovi protsess, s.t ta ei sõltu sellest, mis toimus ajas varem: tõenäosus mingil hilisemal ajahetkel on määratud üksnes tõenäosuse algtingimusega [18–20].

Ruumis pideval piirjuhul ($\Delta x \to 0$) ja välise jõu puudumisel läheb kineetika põhivõrrand (1) üle difusioonivõrrandiks tõenäosustiheduse $P(x,t)$ jaoks

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = D_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t). \qquad (2)$$

Siin $D_0 = k_B T / \eta$ on vaba difusiooni koefitsient, T on temperatuur ja η hõõrdetegur, k_B on Boltzmanni konstant. Kui uitlejale mõjub aga väline jõud $f(x,t)$, avaldub võrrandist (1) saadav pidev võrrand kujul [19]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f(x,t)}{\eta} P(x,t)\right] + D_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t). \qquad (3)$$

Viimane võrrand on tuntud Fokkeri-Plancki võrrandina. Esimene liige võrrandi (3) paremal poolel on triivi liige ning teine difusiooni liige. On ilmne, et välise jõu puudumisel Fokkeri-Plancki võrrand (3) taandub difusioonivõrrandile (2).

Suunatud ülesumbunud difuusset liikumist kirjeldav võrrand (3) pakuti välja 1914. aastal A. D. Fokkeri väitekirjas; põhjalikumalt käsitles seda M. Planck 1918. aastal [21]. Õigupoolest esitas Fokker võrrandi kiiruse jaotusfunktsiooni $P(v,t)$ jaoks. 1915. aastal esitas Smoluchowski sama võrrandi koordinaadi jaotusfunktsiooni $P(x,t)$ jaoks [22] ning seetõttu tuntakse võrrandit (3) ka Smoluchowski võrrandina.

2.2 FRAKTSIONAALNE MATEMAATIKA

Viimase kümne-kahekümne aasta jooksul on paljud füüsikud enda jaoks avastanud, et mitmed süsteemid, eeskätt need, milles leiab aset anomaalselt aeglane difusioon, on hästi kirjeldatavad kasutades fraktsionaalset algebrat [14]. Õigupoolest on fraktsionaalsed integraalid ja tuletised pea niisama vanad kui kõigile hästi tuntud tavaline algebra. Ent möödus ligi 300 aastat, enne kui tänapäeval fraktsionaalse algebrana tuntud matemaatika võeti omaks kui füüsikas praktiline töövahend.

Üks viis, kuidas formaalselt sisse tuua fraktsionaalse tuletise mõiste, on lähtuda täisarvulise astmefunktsiooni korduvast diferentseerimisest:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}. \tag{4}$$

Suvalise astme μ jaoks annab korduv diferentseerimine tulemuse

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)}x^{\mu-n}, \tag{5}$$

kus faktoriaale asendavad gammafunktsioonid. Gammafunktsiooni lihtsaim interpretatsioon on, et ta on faktoriaali üldistus kõikide reaalarvude jaoks, $\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu)$. Neid kasutades võime suvalist järku α tuletise jaoks kirjutada

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}x^\alpha}x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha}. \tag{6}$$

Viimane võrrand vastab Riemanni-Liouville'i tuletisele [14]; see on piisav käsitlemaks funktsioone, mis on arendatavad Taylori ritta.

Üldisem viis tuua sisse fraktsionaalse tuletise mõiste kasutab fakti, et n-indat järku tuletis on n-kordse integreerimise pöördtehe:

$$\int_a^x\int_a^{y_1}\ldots\int_a^{y_{n-1}} f(y_n)\mathrm{d}y_n\ldots\mathrm{d}y_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-y)^{n-1} f(y)\mathrm{d}y. \tag{7}$$

On ilmne, et see samasus on rahuldatud kohal $x=a$, ning ei ole raske näha, et tuletised samasuse mõlemal poolel on võrdsed. Viimase avaldise üldistus lubab meil defineerida α-ndat järku fraktsionaalse integraali

$${}_a\hat{D}_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\mathrm{d}y, \qquad x\geq a. \tag{8}$$

Suvalist järku fraktsionaalne tuletis on defineeritud fraktsionaalse integreerimise ja järgneva tavalise diferentseerimise kaudu. α-ndat järku fraktsionaalne tuletis on

$${}_a\hat{D}_x^{\alpha} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,{}_a\hat{D}_x^{\alpha-n} \tag{9}$$

Aja järgi fraktsionaalsete tuletiste korral võetakse enamasti $a=0$, mis vastab süsteemi evolutsiooni algust märkivale valikule $t=0$. Üldistatud kineetika põhivõrrandis ja üldistatud difusioonivõrrandis on keskne roll operaatoril

$${}_0\hat{D}_t^{1-\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}_0\hat{D}_t^{-\alpha}. \tag{10}$$

2.3 ANOMAALNE DIFUSIOON: AJAS PIDEV UITLIIKUMINE JA FRAKTSIONAALNE FOKKERI-PLANCKI VÕRRAND

Anomaalse difusiooni modelleerimiseks on mitmeid erinevaid viise nii välise jõu puudumisel kui ka olemasolul. Üheks võimaluseks on kasutada ajas pideva uitliikumise mudelit, välja pakutud 1965. aastal Montrolli ja Weissi poolt [23, 24] ning edukalt rakendatud pooljuhtides toimuvat transporti käsitlevates töödes Scheri ja Laxi [25] ning Scheri ja Montrolli [26] poolt. Ajas pideva uitliikumise mudel baseerub ideel, et ooteaeg τ kahe järjestikuse hüppe vahel ning hüppe pikkus λ saadakse tõenäosusjaotusest $\phi(\lambda,\tau)$, mida nimetatakse hüppe tõenäosusjaotuseks [11]. Jaotusest $\phi(\lambda,\tau)$ saadakse hüppe pikkuste jaotuse jaoks

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty \phi(\lambda,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

ning ooteaegade jaotuse jaoks

$$\psi(\tau) = \int_0^\infty \phi(\lambda,\tau)\mathrm{d}\lambda. \tag{12}$$

Kui hüppe pikkus ja ooteaeg on sõltumatud juhuslikud suurused, siis hüppe tõenäosusjaotus faktoriseerub, s.t $\phi(\lambda,\tau)=\psi(\tau)\varphi(\lambda)$. Kui nad on omavahel seotud (Lévy liikumine), siis $\phi(\lambda,\tau)=p(\lambda|\tau)\psi(\tau)$ või $\phi(\lambda,\tau)=p(\tau|\lambda)\varphi(\lambda)$, s.t antud ajavahemikus uitleja saab läbida ainult maksimaalse distantsi.

Sõltuvalt sellest, kas karakteerne ooteaeg

$$\mathcal{T} = \int_0^\infty \psi(\tau)\tau\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

ja hüppe pikkuse dispersioon

$$\Lambda^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\lambda^2 \, d\lambda \tag{14}$$

on lõplikud või hajuvad, võib eristada eri tüüpi uitliikumise protsesse [11]. Vaadelgem juhtu, kus $\phi(\lambda,\tau)=\psi(\tau)\varphi(\lambda)$. Kui nii karakteerne ooteaeg T kui ka hüppe pikkuse dispersioon Λ^2 on lõplikud, siis pikas ajaskaalas leiab aset normaalne Browni liikumine. Kui karakteerne ooteaeg T hajub, kuid hüppe pikkuse dispersioon Λ^2 on lõplik, siis pikas ajaskaalas on liikumine subdifuusne; protsess ei ole Markovi protsess. Kirjeldades transporti, võib ooteaegade jaotus tuleneda võimalikest takistustest ja lõksudest, mis viivitavad osakeste hüppeid ning seega toovad liikumisse sisse mäluefektid. Vastupidisel juhul, s.t kui hüppe pikkuse dispersioon Λ^2 hajub, ent karakteerne ooteaeg T on lõplik, leiavad aset Lévy lennud (superdifusioon). Juhul kui mõlemad, nii karakteerne ooteaeg T kui ka hüppe pikkuse dispersioon Λ^2 hajuvad, leiab aset konkurents pikkade peatuste ning pikkade hüpete vahel. Üldiselt tekitavad pikad hüpped ja pikad ooteajad süsteemis mälu, s.t uitleja käitumine on määratud pikimate hüpete või pikimate ooteaegade poolt. Kokkuvõttes, ajas pideva uitliikumise mudel pakub mitmekülgseid võimalusi kirjeldamaks anomaalset difusiooni.

Järgnev keskendub subdifuussele režiimile. Nii nagu ühedimensionaalse uitliikumise korral, eeldame ka siin, et osake kohal i hüppab tõenäosusega $q_i^{\pm}$ ($q_i^{+}+q_i^{-}=1$) kohale $i\pm1$, ent seda mitte igas ajaühikus, vaid juhusliku ooteaja τ järel. Juhuslik aeg τ saadakse ooteaegade jaotusest $\psi(\tau)$, mille karakteerne ooteaeg T hajub. Säärane ajas pidev uitliikumine on kirjeldatav üldistatud kineetika põhivõrrandiga $P_i(t)$ jaoks [24]

$$\frac{\partial}{\partial t}P_i(t)=\int_0^t \Big\{K_{i-1}^{+}(t-t')P_{i-1}(t')+K_{i+1}^{-}(t-t')P_{i+1}(t') \\ -\left[K_i^{+}(t-t')+K_i^{-}(t-t')\right]P_i(t')\Big\}\mathrm{d}t'; \tag{15}$$

siin $K_i^{\pm}(t)$ on tuum. Võrrandis (15) olevas integraalis esindavad tuuma funktsioonid $K_{i\pm1}^{\mp}(t-t')$ (positiivseid) panuseid $\partial P_i(t)/\partial t$ jaoks tingituna sellest, et osakesed, mis mingil eelneval ajahetkel t', $0<t'<t$, külastavad kohti $i\mp1$, ootavad seal ajavahemiku $\tau=t-t'$ ning hüppavad seejärel ajahetkel t kohale i. Samas $K_i^{\pm}(t-t')$ esindavad (negatiivseid) panuseid tingituna sellest, et osakesed kohalt i, kuhu nad saabusid mingil eelneval ajahetkel t', hüppavad hetkel t kohale $i\pm1$.

Üheks võimalikuks ooteaegade jaotuse valikuks on Mittag-Leffleri jaotus, mis argumendi väikestel väärtustel on eksponentsiaalne ning suurtel väärtustel omab astmelist sõltuvust; $\alpha=1$ korral läheb Mittag-Leffleri jaotus üle eksponentsiaalseks jaotuseks ning tegemist on normaalse difusiooniga. Kasutades Mittag-Leffleri jaotust saame vastavalt üldistatud kineetika põhivõrrandilt üle minna fraktsionaalsele kineetika põhivõrrandile [27]

$$\frac{\partial P_i(t)}{\partial t}={}_0\hat{D}_t^{1-\alpha}\left[g_{i-1}^{+}P_{i-1}(t)+g_{i+1}^{-}P_{i+1}(t)-(g_i^{+}+g_i^{-})P_i(t)\right]; \tag{16}$$

siin suurused $g_i^{\pm}$ on fraktsionaalsed kiirused (sagedused). Riemanni-Liouville'i fraktsionaalse tuletise integro-diferentsiaaloperaator mõjub üldisele ajafunktsioonile $\chi(t)$ järgmiselt [11, 14, 28]:

$${}_0\hat{D}_t^{1-\alpha}\chi(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \mathrm{d}t'\frac{\chi(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} \tag{17}$$

Laplace'i teisenduse meetodit kasutades on võimalik näidata, et fraktsionaalset kineetika põhivõrrandit (16) võib esitada ka kujul [29]

$$D_*^{\alpha}P_i(t)=g_{i-1}^{+}P_{i-1}(t)+g_{i+1}^{-}P_{i+1}(t)-\left(g_i^{+}+g_i^{-}\right)P_i(t), \tag{18}$$

kus sümbol D_*^{α} tähistab Caputo fraktsionaalset tuletist [28],

$$D_*^{\alpha}\chi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \mathrm{d}t'\frac{1}{(t-t')^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial t'}\chi(t') \tag{19}$$

Võrrand (18) on formaalselt väga sarnane uitliikumist kirjeldavale kineetika põhivõrrandile (1), selle erinevusega, et tavaline tuletis aja suhtes $\partial/\partial t$ on asendatud fraktsionaalse tuletisega (19).

Sarnaselt normaalse Browni liikumise juhule saab fraktsionaalsest kineetika põhivõrrandist tuletada fraktsionaalse Fokkeri-Plancki võrrandi [11, 30, 31]

$$D_*^{\alpha}P(x,t)=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x)}{\eta_\alpha}+K_\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]P(x,t); \tag{20}$$

viimase võrrandi võib viia ka kujule

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)={}_0\hat{D}_t^{1-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x)}{\eta_\alpha}+\kappa_\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]P(x,t). \tag{21}$$

Siin κ_α tähistab anomaalse difusiooni koefitsienti dimensiooniga $[\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-\alpha}]$ ning η_α tähistab üldistatud hõõrdetegurit dimensiooniga $[\mathrm{kg\ s}^{\alpha-2}]$. Need kaks suurust on omavahel seotud üldistatud Einsteini seose kaudu,

$$\eta_\alpha\kappa_\alpha=k_B T. \tag{22}$$

Olgu siinkohal mainitud, et võttes arvesse ka mittelokaalse hüpete statistika, s.t eeldades, et nii T kui ka Λ^2 on lõpmatud, saadakse fraktsionaalne Fokkeri-Plancki võrrand kujul

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)={}_0\hat{D}_t^{1-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x)}{\eta_\alpha}+\kappa_\alpha^\mu\nabla^\mu\right]P(x,t); \tag{23}$$

siin $\nabla^\mu\equiv\partial^\mu/\partial|x|^\mu$ on Rieszi fraktsionaalne tuletis ning fraktsionaalse difusiooni koefitsiendi κ_α^μ dimensioon on $[\mathrm{m}^\mu\mathrm{s}^{-\alpha}]$; $0<\mu<2$. Operaator ${}_0\hat{D}_t^{1-\alpha}$ on seotud hüpetevaheliste ooteaegade astmelise tõenäosusjaotusega, kuna aga ∇^μ on seotud hüppe pikkuste astmelise jaotusega. Võrrand (23) kirjeldab seega konkurentsi subdifusiooni ja Lévy lendude vahel. $\mu=2$ korral saadakse võrrandist (23) võrrand (21).

Markovi Lévy lendude korral, s.t $\alpha=1$ jaoks, läheb võrrand (23) üle võrrandiks

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x)}{\eta}+\kappa^\mu\nabla^\mu\right]P(x,t); \tag{24}$$

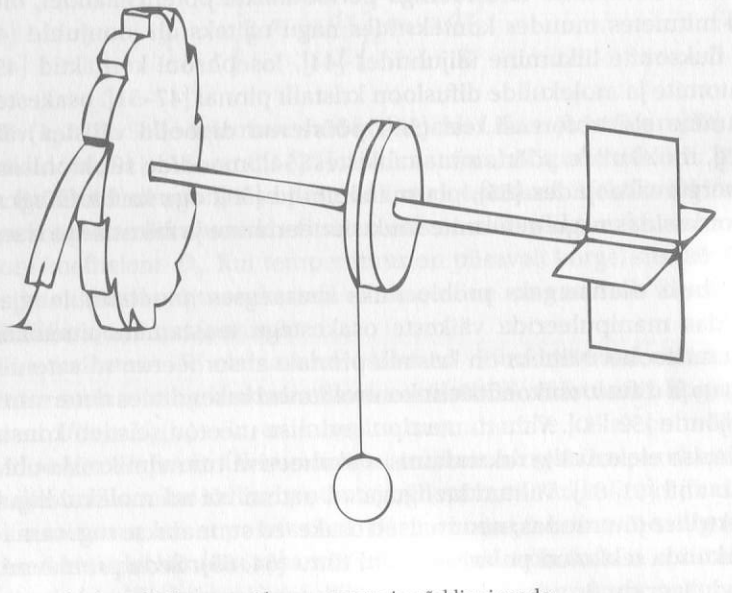
siin on fraktsionaalse difusiooni koefitsiendi κ^μ dimensiooniks $[\mathrm{m}^\mu\mathrm{s}^{-1}]$. Tähelepanu väärib, et Lévy müra mõjutab üksnes difusiooni liiget, samas aga hüpetevahelised pikad ooteajad omavad mõju nii difusiooni kui ka triivi liikmele.

Fraktsionaalsed võrrandid üldistavad normaalse difusiooni teooriast teada olevad võrrandid, võttes arvesse mälu efektid nagu näiteks polümeeride venitamine ning sügavate lõksude hõivamine laengukandjate poolt amorfsetes pooljuhtides. Säärased üldistatud võrrandid lubavad füüsikutel kirjeldada komplekseid süsteeme, milles leiab aset anomaal-

ne dünaamika, sarnaselt lihtsamatele süsteemidele, kus toimub normaalne difusioon.

3. NORMAALNE DIFUSIOON JA PERIOODILISED JÕUVÄLJAD

Perioodilistel potentsiaalidel toimuva Browni liikumise uurimine lähtub küsimusest, kas Browni liikumist on võimalik muuta kasulikuks tööks. Algne idee pakuti välja Smoluchowski poolt 1912. aastal [32] ning seda arendas edasi Feynman [33]. Tänapäeval Smoluchowski-Feynmani hammasrattana tuntud Smoluchowski ja Feynmani mõttelise eksperimendi peamiseks koostisosaks on telg, mille ühes otsas on tiivikud ning teises otsas asümmeetriliste hammastega hammasratas ning põrklink (joonis 1). Kogu seade on ümbritsetud gaasiga, mis on soojuslikus tasakaalus. Kui kirjeldatud seade saaks vabalt pöörelda, siis sooritaks ta tiivikuid liikuma panevate gaasi molekulide juhuslike põrgete tõttu pöörlevat Browni liikumist. Kuna aga põrklink tõkestab telje pöörded ühes suunas, kuid lubab



Joonis 1: Smoluchowski-Feynmani hammasratta ja põrklingi seade.

teises suunas, siis tundub üsna loomulikuna, et keskmiselt toimub süstemaatiline pöörlemine ühes suunas, isegi kui rakendada väikest koormust teises suunas [34]. See aga oleks vastuolus termodünaamika teise seadusega (vt artiklid [33, 35]).

Smoluchowski-Feynmani hammasratta realiseerisid eksperimentaalselt molekulaarsel skaalal Kelly, Tellitu ja Sestelo [36, 37]. Tuumamagnetresonantsi eksperimentides leidis kinnitust ennustatud pöörlemise eelistatud suuna puudumine soojuslikus tasakaalus.

Hammasratta ja põrklingi seadme täpne modelleerimine ning analüüs on üsna keeruline, seda eriti mikroskoopilisel tasemel [34]. Ent me võime keskenduda tunduvalt lihtsamale matemaatilisele mudelile, mis säilitab peamised kvalitatiivsed omadused ning on formuleeritav Browni liikumisena ühedimensionaalsel ruumiliselt perioodilisel potentsiaalil $U_0(x)=U_0(x+L)$, kus L on periood.

Browni liikumine perioodilistel struktuuridel on saanud oluliseks mitmete probleemide käsitlemisel füüsikas, olles huvitav nii tehnoloogilisest, eksperimentaalsest kui ka teoreetilisest aspektist, ning on olnud intensiivsete uuringute objektiks juba mitmeid aastaid [19, 38–40]. Lisaks reaalsete Browni osakeste kirjeldamisele on probleemid, mis on seotud normaalse difusiooniga perioodilistel potentsiaalidel, olulised ka mitmetes muudes kontekstides nagu näiteks üli-ioonjuhid [41–43] ja fluksonite liikumine ülijuhtides [44], Josephsoni kontaktid [45, 46], aatomite ja molekulide difusioon kristalli pinnal [47–51], osakeste eraldamine elektroforeesi teel [52], pöörlevad dipoolid välistes väljades [53], molekulide pöörlemine tahkistes [54], moodide sünkronisatsioon lasergüroskoopides [55], plasmakiirendid [56], aga ka biofüüsikalistes protsessides nagu neuronite funktsioneerimine ja rakusisene transport [57, 58].

Üheks olulisemaks probleemiks kaasaegses nanotehnoloogias on, kuidas manipuleerida väikeste osakestega teostamaks ettemääratud operatsioone. Näiteks on kristalli pinnale absorbeerunud aatomite liikuvus ja difusioonikoefitsient kontrollitavad rakendades deterministlikke jõude [59, 60]. Vahetu manipuleerimise meetod seisneb konstantse lokaalse elektrivälja rakendamises skaneeriva tunnelmikroskoobi teraviku abil [61–63]. Valitud laenguga ad-aatom või ad-molekul liigub siis elektrilise jõu suunas; neutraalsed osakesed suunatakse tugevama välja piirkonda tekitatud polarisatsiooni tõttu [64, 65]. Seda probleemi võib modelleerida Browni liikumisena kallutatud perioodilisel kahedimen-

sionaalsel substraadil, mille võib taandada ühedimensionaalseks süsteemiks. Lisaks sellele näitele on veel rida teisi füüsikalisi ja bioloogilisi süsteeme, kus osakeste dünaamika on loomulikult taandatav dünaamikaks ühedimensionaalsetel substraatidel. Aktuaalsetest probleemidest võib näiteks tuua kolloidid [66, 67] või külmad aatomid [68, 69] optilistes lõksudes, ülijuhtivad pöörised litografeeritud jälgedes [70, 71], ioon-kanalid [72], rakumembraanid [73], tehislikud ning loomulikud nanopoorid [74–77], molekulaarmootorid [78–86] ning dislokatsioonide dünaamika [87–89].

Vaadelgem Browni liikumist ühedimensionaalsel perioodilisel potentsiaalil $U_0(x)$. Koormuse puudumisel ning seni kuni soojuslike fluktuatsioonide keskväärtus on null, on keskmine vool null, s.t puudub suunatud liikumine. Samal ajal võivad osakesed mürast tingitud ergutuse tõttu lahkuda potentsiaaliaugust ning hüpata kas paremale või vasakule lähimasse potentsiaaliauku ning aja jooksul liikuda kaugematesse potentsiaaliaukudesse. Seega difundeeruvad osakesed piisavalt pika aja jooksul x-telje mõlemas suunas. Pikas ajaskaalas võib seda difusiooni kirjeldada efektiivse difusioonikoefitsiendi kaudu:

$$D=\frac{D_0}{\int_0^L e^{-\beta U_0(x)}\frac{\mathrm{d}x}{L}\int_0^L e^{\beta U_0(x')}\frac{\mathrm{d}x'}{L}}; \tag{25}$$

siin $\beta=(k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$. Selle tulemuse said kõigepealt Lifson ja Jackson [38] (vt ka artiklid [90, 91]). Võrrandis (25) on nimetaja alati suurem kui 1: seega on iga ühedimensionaalse perioodilise potentsiaali efektiks tekitada makroskoopiline difusioonikoefitsient, mis on alati väiksem kui vaba difusiooni koefitsient D_0. Kui temperatuur on piisavalt kõrge, siis perioodilise potentsiaali mõju osakestele ei ole oluline ning toimub üleminek vabale difusioonile, vt joonis 2.

Välise kallutuse F olemasolul osakesed difundeeruvad eelistatult kallutuse suunas ning keskmine vool v sõltub F väärtusest. Kogupotentsiaal $U(x)=U_0(x)-Fx$ on laineline tasand, mille kallak on määratud välise jõu F poolt. Ülesumbunud režiimis ning müra puudumisel on osakeste liikumine sellisel potentsiaalil roomav. Kui kallutav jõud F on piisavalt suur, nii et potentsiaal $U(x)$ ei oma miinimume, liiguvad osakesed mööda lainelist tasandit alla; tegemist on ladusa režiimiga. Kui miinimumid eksisteerivad, siis osakesed jõudes sinna peatuvad;

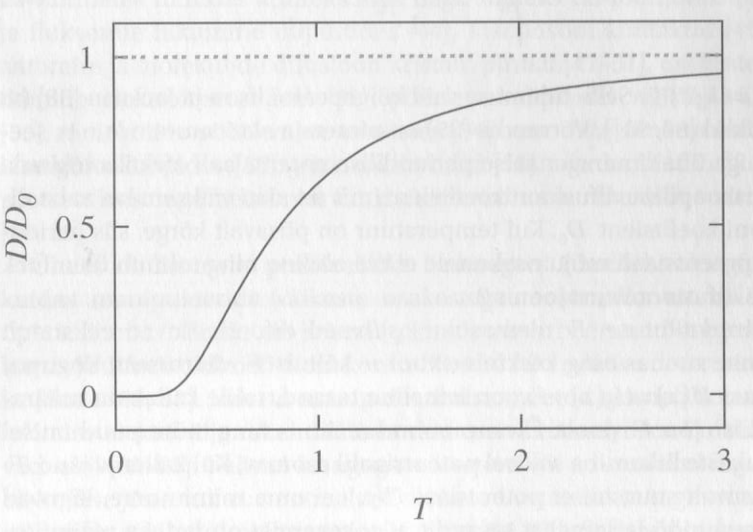
tegemist on lukustatud režiimiga. Müra olemasolul ei jää osakesed alaliselt lukustatud seisundisse, vaid aset leiavad müra poolt aktiveeritud põgenemised. Keskmiselt leiab seega aset hüpete protsess ühest miinimumist teise, madalamasse [19]. Statsionaarne vool on kirjeldatav avaldisega

$$v = \frac{LD_0\left(1-e^{-\beta FL}\right)}{\int_0^L \mathrm{d}x e^{-\beta U(x)} \int_x^{x+L} e^{\beta U(x')} \mathrm{d}x'}. \quad (26)$$

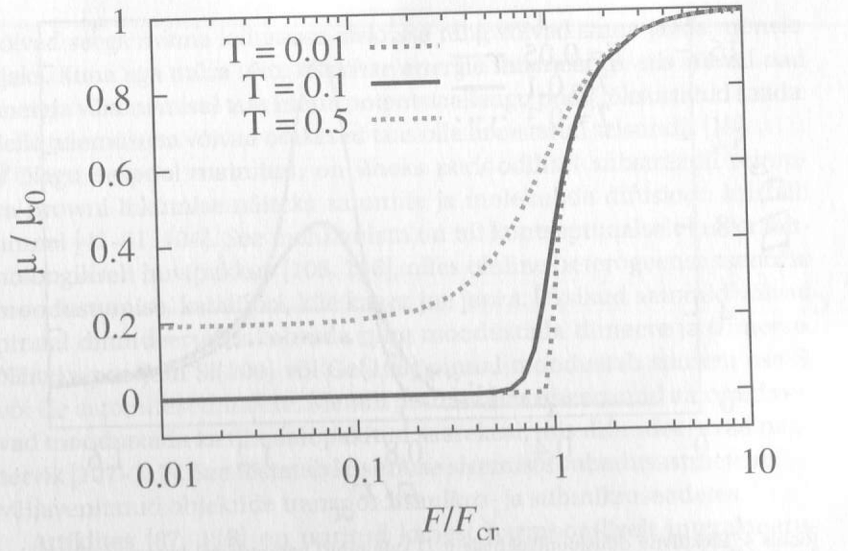
Sellele tulemusele jõudis esimesena Stratonovich [92, 93] ning seda tuntakse Stratonovichi valemina. Siit on näha, et $F=0$ korral $v=0$, nagu juba räägitud. Samuti, võttes arvesse, et $F\to\infty$ korral potentsiaal $U(x)=U_0(x)-Fx\approx -Fx$, saame Stratonovichi valemist

$$v = F\eta^{-1} \quad (F\to\infty), \quad (27)$$

s.t kallutuse F suurte väärtuste korral toimub osakeste liikumine nagu konstantse jõu väljas; efektiivne difusioonikoefitsient on $D=D_0$.



Joonis 2: Efektiivne difusioonikoefitsient D perioodilisel potentsiaalil $U_0(x)=\cos(2\pi x/L)$ *vs.* temperatuur T. Punktiirjoon vastab vabale difusioonile.



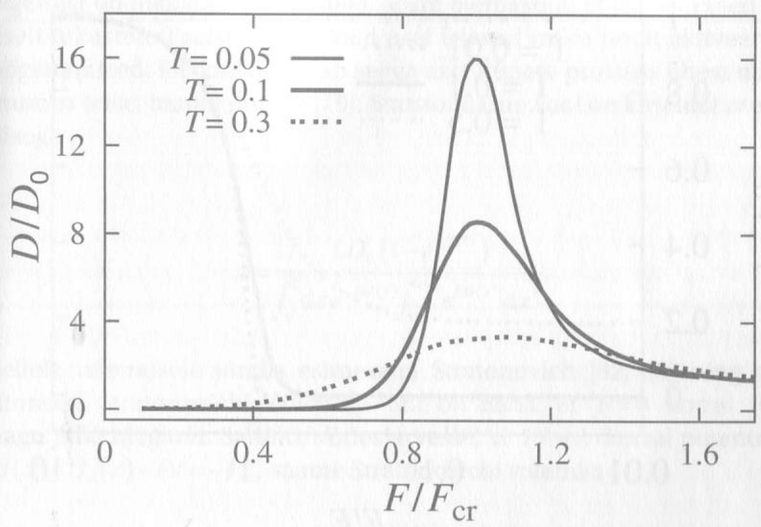
Joonis 3: Liikuvus μ *vs.* kallutav jõud F perioodilise substraadi $U_0(x)=\cos(2\pi x/L)$ jaoks; erinevad kõverad vastavad temperatuuri T erinevatele väärtustele. Lineaarse vaste režiim on selgelt nähtav.

Voolu asemel võime uurida ka osakeste liikuvust, mis on defineeritud järgmiselt:

$$\mu = vF^{-1}. \quad (28)$$

Nagu võib näha joonisel 3, madalatel temperatuuridel, $T\ll 1$, on osakeste liikuvus nullilähedane (lukustatud režiim). Kallutuse kriitilise väärtuse juures, kui potentsiaal $U(x)$ kaotab miinimumid, kasvab liikuvus järsult. Jõu suurte väärtuste korral on osakese liikumine kirjeldatav $\mu_0=\eta^{-1}$ poolt (ladus režiim). Kõrgematel temperatuuridel on üleminek lukustatud režiimilt ladusale režiimile vähem järsk. Väikeste F väärtuste korral on liikuvus μ kallutusest sõltumatu, nagu oodatud lineaarse vaste teooriast.

Analüütiline avaldis difusioonikoefitsiendi jaoks perioodilistel potentsiaalidel meelevaldse kallutava jõu mõjumisel ja meelevaldse temperatuuri jaoks tuletati ülesumbunud režiimi juhul alles hiljuti [94–96] uuendamise teooria lähenduses [97]. Difusioonikoefitsiendi sõltuvus kallutatud perioodilisel potentsiaalil kallutava jõu F väärtusest on illustreeritud joonisel 4. Väikeste kallutuse väärtuste ja madalate tempe-



Joonis 4: Efektiivne difusioonikoefitsient D kallutatud perioodilisel potentsiaalil $U_0(x) = A\cos(2\pi x/L) - Fx$ *vs.* kallutav jõud F. Erinevad kõverad vastavad temperatuuri T erinevatele väärtustele.

ratuuride korral on difusioonikoefitsient maha surutud võrreldes vaba difusiooni koefitsiendiga; lineaarses vastes on difusioonikoefitsient ligikaudu $D(F,T) \simeq k_B T \mu(F,T)$ [19]. Kriitilise kallutuse lähedal on vaadeldav difusiooni võimendumine [98]; mida madalam on temperatuur, seda suurem on difusiooni piigi kasv. Suurte jõudude korral toimub üleminek vaba difusiooni režiimile.

Artiklites [99–103] on leitud, et transpordi protsessid perioodilistel substraatidel on väga tundlikud müra intensiivsuse ja kallutuse suhtes. Samuti näidati, et perioodilise potentsiaali kuju mõjutab oluliselt stohhastilist transporti.

Süsteemides, kus saavad oluliseks inertsiefektid, võib müra puudumisel ilmneda lukustatud lahend, kui miinimumid eksisteerivad. Erinevalt ülesumbunud süsteemidest võib ilmneda ka ladus lahend, isegi kui potentsiaal omab miinimume: nimelt kui hõõrdetegur on piisavalt väike, võivad osakesed impulsi tõttu ületada potentsiaalibarjääri. Müra olemasolu korral võidakse osakesed potentsiaali miinimumist (s.t lukustatud seisundist) välja lüüa. Kui hõõrdumine on piisavalt väike, siis osakesed ei kaota oma energiat väga kiiresti ning seega ei lõksustu järgmisesse, madalamal asuvasse potentsiaaliauku, nagu see juhtub suure hõõrde korral. Osakesed

võivad seega minna ladusasse olekusse ning võivad sinna jääda mõneks ajaks. Kuna aga müra tõttu osakeste energia fluktueerub, siis võivad nad energia vähenemisel taas mõne potentsiaaliaugu poolt lõksustatud saada. Selle tulemusena võivad osakesed taas olla lukustatud seisundis [19].

Nagu eespool mainitud, on üheks perioodilisel substraadil toimuva Browni liikumise näiteks aatomite ja molekulide difusioon kristalli pinnal [47–51, 104]. See mehhanism on nii kontseptuaalselt kui ka tehnoloogiliselt huvipakkuv [105, 106], olles oluline heterogeense tsentrite moodustumise, katalüüsi, kile kasvu jne jaoks. Üksikud aatomid võivad pinnal difundeerudes kohtuda ning moodustada dimeere ja trimeere. Näiteks pooljuhi Si(100) või Ge(100) pinnal moodustab suurem osa Si või Ge aatomitest dimeere. Metalli pinnale adsorbeerunud aatomid võivad moodustada ka tihedalt pakitud saarekesi, mis difundeeruvad nagu tervik [107–117]. See tõstatab küsimuse sisemiste vabadusastmete rollist väljavenitatud objektide transpordis mikro- ja submikroseadetes.

Artiklites [87, 118] on uuritud kahest harmooniliselt interakteeruvast Browni monomeerist koosnevate dimeeride difusiooni kallutatud perioodilistel potentsiaalidel. Dimeeri transporti uuriti erinevate sidestustugevuse ja hõõrdetegurite väärtuste jaoks ning leiti, et keskmine vool ja difusioonikoefitsient kui kallutuse ning dimeeri pikkuse ja substraadi konstandi funktsioon omab keerukat mittemonotoonset käitumist. Teise resonantse piigi ilmnemine difusioonikoefitsiendis *versus* kallutav jõud oli vaadeldav suhteliselt väikese hõõrdumisega süsteemides. Lisaks dimeeride transpordi kirjeldamisele on antud mudel rakendatav ka dissotsieerunud dislokatsioonide dünaamika kirjeldamiseks [87–89].

On teada, et ajas varieeruvate potentsiaalide korral ilmnevad Browni liikumises mitmed huvitavad nähtused nagu näiteks Browni mootorid, anomaalne mittelineaarne vaste käitumine ja stohhastiline resonants [78, 79, 119–121]. Toogem siinkohal näite ümberlülitatavast hammasrattast. Smoluchowski-Feynmani hammasratta korral osakesed liiguvad jõu F poolt määratud suunas; vool puudub, kui $F = 0$; see on nõnda nii sümmeetriliste kui ka asümmeetriliste potentsiaalide korral. Lülitades aga asümmeetrilist potentsiaali sisse ja välja on võimalik teha tööd välise jõu F vastu. Kuna osakese keskmise voolu sõltuvus kallutusest F on tavaliselt pidev, siis on kvalitatiivse analüüsi jaoks piisav, kui uurida juhtu $F = 0$: hammasratta efekti ilmnemiseks on sellisel juhul lõpliku voolu $v \neq 0$ olemasolu $F = 0$ jaoks. Kui potentsiaal on välja lülitatud, osakesed difundeeruvad võrdse tõenäosusega paremale ja vasakule. Lülitades mõne aja pärast potentsiaali sisse, libisevad osakesed allamäge, perioodilise potentsiaali lähima lokaalse miinimumi suunas. Potentsiaali asümmeetria tõttu on iga miinimumi algne populatsioon nüüd jaotatud asümmeetriliselt ning selle tulemusena leiab süsteemis aset keskmine nihe. Sümmeetriliste potentsiaalide korral ei ole hammasratta efekt vaadeldav. Hammasratta efekti ilmnemise juures mängib olulist rolli ka potentsiaali lülitamise sagedus ning samuti temperatuur. Asümptootiliselt aeglase lülitamise korral keskmine osakeste vool v läheneb nullile, kui $F = 0$, s.t hammasratta efekt puudub. Kiire lülitamise korral aga pole osakestel piisavalt aega, et levida, kui potentsiaal on välja lülitatud, ning nad jäävad seega enamasti potentsiaali miinimumi asukohta, kus nad algselt olid.

4. ANOMAALSELT AEGLANE DIFUSIOON JÕUVÄLJADES

Vaadelgem nüüd liikumist pikkade lõksustamisaegadega välises jõuväljas. Anomaalne difusioon, mida kirjeldab fraktsionaalne Fokkeri-Plancki võrrand (21), mõjutatud konstantse välise jõu F poolt, on põhjalikult uuritud nähtus, mis leiab aset mitmetes erinevates süsteemides. Lahendid osakese keskmise koordinaadi ja ruutkeskmise koordinaadi jaoks on

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle + \frac{F}{\eta_\alpha}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{29}$$

$$\langle \delta x^2(t)\rangle = \langle \delta x^2(0)\rangle + 2\kappa_\alpha \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{F^2}{\eta_\alpha^2}\left[\frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)}\right] t^{2\alpha}. \tag{30}$$

Fraktsionaalne vool on defineeritud kui

$$v_\alpha = \Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to\infty}\frac{\langle x(t)\rangle - \langle x(0)\rangle}{t^\alpha}. \tag{31}$$

Seega kallutatud, pikkade ooteaegadega ajas pideva uitliikumise korral $v_\alpha = F\eta_\alpha^{-1}$. Võrreldes normaalse difusiooniga sisaldab ruutkeskmise koordinaadi avaldis lisaks soojuslikule panusele $\propto t^\alpha$ ka ballistilist liiget $\propto t^{2\alpha}$. Tulemuseks on, et $\alpha < 1$ ei too alati kaasa subdifuusset käitumist; kallutuse olemasolul leiab $0{,}5 < \alpha < 1$ jaoks aset superdifusioon.

Lõpliku kallutuse F korral on ballistiline liige võrrandis (30) võrdne nulliga ainult juhul $\alpha = 1$, mille korral on tegemist normaalse Browni liikumisega. Võrranditest (29), (30) saadakse üldistatud Einsteini seos, mis on jõus mittelineaarne ning kehtib lõpliku hüppe pikkuse Δx jaoks:

$$\frac{\langle \delta x^2(t)\rangle - \langle \delta x^2(0)\rangle}{\langle x(t)\rangle - \langle x(0)\rangle} = \Delta x \coth(F\beta\Delta x/2). \tag{32}$$

Piiril $F \to 0$ läheb võrrand (32) üle hästi tuntud Einsteini seoseks ($\alpha = 1$) $\kappa_\alpha / \mu_\alpha(0) = \beta^{-1}$ soojusliku difusiooni koefitsiendi

$$\kappa_\alpha = \Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to\infty}\frac{[\langle \delta x^2(t)\rangle - \langle \delta x^2(0)\rangle]_{F=0}}{2t^\alpha} \tag{33}$$

ja lineaarse liikuvuse $\mu_\alpha(F=0)$,

$$\mu_\alpha(F) = \frac{v_\alpha}{F} = \Gamma(\alpha+1)\lim_{t\to\infty}\frac{\langle x(t)\rangle - \langle x(0)\rangle}{Ft^\alpha}, \tag{34}$$

vahel. Sama Einsteini seos kehtib ka subliikuvuse ja subdifusiooni koefitsiendi jaoks iga $\alpha < 1$ korral [122], kuna ballistiline liige ruutkeskmise koordinaadi avaldises (30) kaob $F = 0$ korral; kallutuse puudumisel ruutkeskmine koordinaat kasvab ajas $\propto t^\alpha$,

$$\langle \delta x^2(t)\rangle = \langle \delta x^2(0)\rangle + \frac{2\kappa_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}t^\alpha. \tag{35}$$

Ent üldistatud Einsteini seosega (32) analoogne seos lakkab kehtimast $\alpha < 1$ jaoks iga lõpliku F väärtuse korral, kuna ruutkeskmises koordinaadis saab pikas ajaskaalas domineerivaks ballistiline panus. Selle asemel saadakse võrranditest (29), (30) järgmine asümptootiline skaleerimise seos:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\langle \delta x^2(t)\rangle}{\langle x(t)\rangle^2} = \frac{2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} - 1. \tag{36}$$

See seos ei sisalda enam fraktsionaalseid kiiruseid (sagedusi) ning kehtib sõltumatult kallutuse F väärtusest ja temperatuurist T. Seos (36) saadi esmakordselt artiklis [26] konstantses jõuväljas toimuva ajas pideva uitliikumise jaoks.

Nagu räägitud, on Browni osakeste soojuslik difusioon ruumis perioodilise jõuvälja mõju all laialdast uurimist leidnud probleem. Samas on mitmed bioloogilised ja kondenseeritud aine süsteemid hästi kirjeldatavad korrapäratutel substraatidel liikuvate osakeste kaudu. Sõltuvalt potentsiaali statistilistest omadustest võib pikas ajaskaalas aset leidev protsess olla üsna erinev perioodilisel potentsiaalil toimuvast [10, 124]. On näidatud, et substraadi heterogeensus võib viia anomaalse dünaamika ilmnemisele [10, 125–127]. Võttes arvesse subdifusiooni ning perioodilistel potentsiaalidel toimuva transpordi olulisust mitmetes rakendustes [11, 79, 128], on artiklites [129–131] uuritud juhusliku substraadi ja perioodilise jõu koosmõju. Subdifuusset dünaamikat modelleeriti sealjuures juhusliku potentsiaali asemel [10, 125, 132] sobiva pika sabaga ooteaegade tõenäosustiheduse kaudu [10, 126, 133].

Artiklites [129, 130] on näidatud, et Stratonovichi lahend (26) statsionaarse voolu jaoks perioodilisel potentsiaalil üldistub subdifuussele transpordile: vaba difusiooni koefitsient D_0 võrrandis (26) on asendatud vaba fraktsionaalse difusiooni koefitsiendiga κ_α. Lisaks sellele näidati, et skaleeringu seadus (36) on kehtiv ka kallutatud perioodilistel potentsiaalidel toimuva liikumise korral ning et ta on universaalne selles mõttes, et ei sisalda perioodilist potentsiaali $U_0(x)$, kallutust F ega temperatuuri T. Samuti üldistati Lifsoni-Jacksoni tulemus (25) normaalse difusiooni jaoks perioodilisel potentsiaalil [38, 90, 91] anomaalselt aeglase difusiooni jaoks, asendades $D_0 \to \kappa_\alpha$ [131].

Ruumis perioodilistes jõuväljades toimuva normaalse Browni liikumise jaoks kehtivate tulemuste üldistumine subdifusiooni juhule kinnitab veelgi formaalset analoogiat fraktsionaalse ja normaalse difusiooni vahel, lisaks formaalsele sarnasusele Fokkeri-Plancki ja fraktsionaalse Fokkeri-Plancki võrrandite vahel. Ent see formaalne analoogia varjab mõningaid põhilisi füüsikalisi erinevusi. Nimelt leiab pikkade ooteaegadega süsteemides aset ergoodilisuse nõrk rikkumine [134], s.t ühe osakese trajektoori keskmistamine üle aja ei ole võrdne keskmistamisega üle ansambli; siin ilmneb oluline erinevus normaalse difusiooniga. Ka paljastavad fundamentaalseid erinevusi anomaalse ja normaalse difusiooni vahel tõenäosustiheduste ajaline evolutsioon konfiguratsiooniruumis ning samuti voolu tõenäosustiheduste evolutsioon.

Artiklis [131] leiti, et pärast sobivat aja skaleeringut ühituvad anomaalse ning normaalse süsteemi asümptootilised tihedused $P(x,t)$ koordinaadi x jaoks perioodilisel potentsiaalil. Selged erinevused ilmnevad ent redutseeritud tõenäosustiheduste käitumistes väikeste evolutsiooniaegade korral. $P(x,t)$ ajaline evolutsioon muutub lõpliku kallutuse F rakendamisel drastiliselt: kui kallutatud normaalse difusiooni korral $P(x,t)$ maksimum liigub normaalse, suunatud vooluga, siis anomaalsel juhul on domineerivaks ballistiline difusioon, mis jätab maksimumi esialgse lähedale (mäluefekti ilming), vt joonis 5.

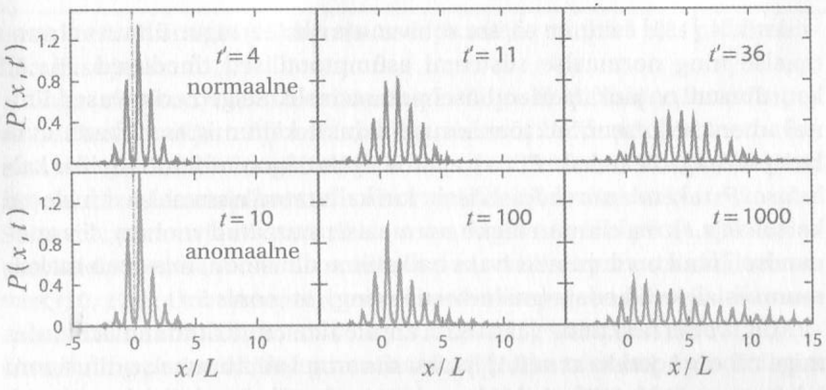
Kuigi voolu keskmine väärtus on antud üldistatud Stratonovichi valemiga nii $\alpha = 1$ kui ka $\alpha \in (0,1)$ jaoks, siis erinevalt normaalse difusiooni juhust, anomaalse difusiooni korral on voolu tõenäosustihedus $P(v_\alpha, t)$ väga lai [130, 135]. Jaotuse kuju on universaalne selles mõttes, et ta ei sõltu substraadi potentsiaalist ja temperatuurist, vaid üksnes kallutusest ja fraktsionaalsest eksponendist; liikumisel ainult konstantse jõu mõjuväljas kehtivad samad tulemused.

Nagu juba mainitud ülalpool, viib Browni liikumine ajas muutuvatel potentsiaalidel mitmete huvitavate fenomenide ilmnemisele. Siit aga kerkib küsimus, kas ka anomaalselt aeglase relaksatsiooniga protsesside korral võiksid ilmneda sarnased mitmekülgsed stsenaariumid. Tegelikult sisaldub see küsimus juba esimestes, pooljuhtides toimuvat laengukandjate liikumist kirjeldavates töödes [133] ning seda on uuritud mõningal määral ka hiljem, vt nt [136–140]. Ent fundamentaalsel tasemel on sellele probleemile tähelepanu hakatud pöörama alles hiljuti; üliaeglane relaksatsioon ajast sõltuvates potentsiaaliväljades on triviaalsusest kaugel.

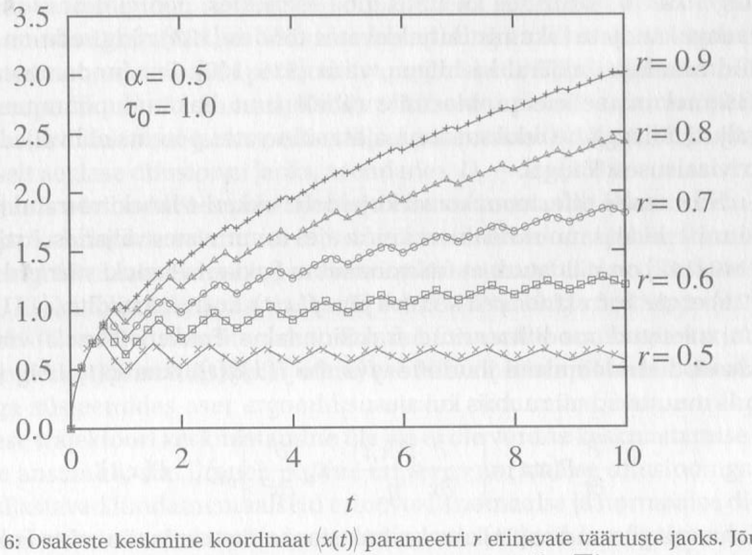
Normaalse difusiooni korral kirjeldab Fokkeri-Plancki võrrand (3) liikumist nii ajas muutumatutes kui ka ajas muutuvates väljades. Artiklites [140–142] on näidatud, et fraktsionaalne Fokkeri-Plancki võrrand kujul (21) ei ole korrektne ajast sõltuva jõu $f(x,t)$ korral. Artiklites [141, 142] on tuletatud modifitseeritud fraktsionaalne Fokkeri-Plancki võrrand klassi dihhotoomsete jõudude $f(x,t) = f(x)\xi(t)$, kus $\xi(t) = \pm 1$, jaoks, mis muutuvad nii ruumis kui ajas:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \frac{f(x,t)}{\eta_\alpha} + \kappa_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] {}_0\hat{D}_t^{1-\alpha} P(x,t). \tag{37}$$

Erinevalt võrrandist (21) ei seisa fraktsionaalne tuletis siin mitte Fokkeri-Plancki operaatori ees, vaid järel.



Joonis 5: Tõenäosustiheduste ajalised evolutsioonid kallutatud koosinus-potentsiaalil $U(x)=A\cos(2\pi x/L)-Fx$ normaalse (ülal) ning anomaalse (all) difusiooni jaoks. Reskaleeritud temperatuur on $k_B T A^{-1}=0{,}5$ ning fraktsionaalne eksponent on $\alpha=0{,}5$. Kallutav jõud on $F=0{,}1\times F_{cr}$, kus $F_{cr}=2\pi A L^{-1}$ on reskaleeritud kriitiline kallutus, mis vastab potentsiaali miinimumide kadumisele. Ajad t ja t' on seotud $t'=(t/\tau_u)^{\alpha}/\Gamma(1+\alpha)$ kaudu, kus $\tau_u=(\eta_\alpha L^2/A)^{1/\alpha}$. Piisavalt väikestel aegadel on normaalse ning anomaalse protsessi tõenäosustihedused väga sarnased. Suurtel aegadel aga (pikas ajaskaalas) liigub normaalse difusiooni tõenäosustiheduse maksimum suunatud vooluga. Fraktsionaalse difusiooni korral on osakeste ruutkeskmises koordinaadis valitsev ballistiline panus ning tõenäosustihedus on tüüpiliselt väljavenitatud kallutuse suunas, samas kui maksimum jääb algtingimustega määratud koha lähedale.



Joonis 6: Osakeste keskmine koordinaat $\langle x(t)\rangle$ parameetri r erinevate väärtuste jaoks. Jõu aja-perioodid on $\tau_0=1$, fraktsionaalne eksponent on $\alpha=0{,}5$ ja $F_0/(\eta_\alpha\sqrt{\kappa_\alpha})=1$ on kasutatud numbrilistes simulatsioonides.

Artiklites [141, 142] on vaadeldud perioodiga τ_0 ajas perioodilist dihhotoomset jõudu $f(t)=\pm F_0$, kus aja $r\tau_0$ jooksul perioodist jõud on $+F_0$ ja $(1-r)\tau_0$ jooksul perioodist $-F_0$. Joonisel 6 esitatud tulemused näitavad, et piiril $t\to\infty$ ilmneb fraktsionaalse kineetika korral ajast sõltuvate väljade suhtes „lineaarse vaste surma" fenomen (täheldatud ka artiklites [138, 140]): vahelduvast väljast tingitud ostsillatsioonid hääbuvad mõne aja pärast. Selle tulemuseks on, et keskmise kallutuse puudumisel, pikas ajaskaalas saavutab osakese keskmine koordinaat konstantse väärtuse, selle asemel et olla ostsilleeruv, nagu see on normaalse difusiooni korral. Selline käitumine kaob, kui ooteaegade jaotus võtta äralõigatud sabaga, mis viib lõpliku esimese momendi olemasolule. Sellisel juhul ilmneb subdifuusne käitumine üleminekuna asümptootiliselt normaalsele difusioonile. Keskmise kallutuse olemasolul kasvab osakese keskmine koordinaat $\propto t^{\alpha}$.

Kui ajas perioodilise dihhotoomse jõu $f(t)=\pm F_0$ keskväärtus on null, siis osakeste ruutkeskmise koordinaadi asümptootiline käitumine on $\propto t^{\alpha}$, sarnaselt jõuvabale juhule, ent iseloomustatud vaba fraktsionaalse difusiooni koefitsiendi κ_α asemel efektiivse fraktsionaalse difusiooni koefitsiendiga $\kappa_\alpha^{(\mathrm{eff})}>\kappa_\alpha$; normaalse difusiooni korral oleks efektiivne difusioonikoefitsient võrdne vaba difusiooni koefitsiendiga. Lõpliku keskväärtusega dihhotoomse jõu korral on ruutkeskmise koordinaadi üldine käitumine sarnane konstantse jõu juhuga, s.t ruutkeskmine koordinaat sisaldab liikmeid $\propto t^{\alpha}$ ja $\propto t^{2\alpha}$. Sarnaselt konstantse kallutuse juhule kehtib asümptootiline skaleeringu seos (36) ($r\neq 0{,}5$, $\langle f(t)\rangle_{\tau_0}\neq 0$) ruutkeskmise koordinaadi ja osakese keskmise koordinaadi vahel. See tähendab, et kallutatud difusioon ei ole mõjutatud jõu poolt. Siin ilmneb oluline erinevus kallutuseta difusiooniga, kus ostsilleeriv jõud tekitab efektiivse difusioonikoefitsiendi suurenemise vaba difusiooni koefitsiendi suhtes.

5. LÕPETUSEKS

Käesolevas töös on antud lühike ülevaade erinevates jõuväljades toimuvast normaalsest ning subdifusioonist. Samuti on kirjeldatud uitliikumise ja erinevaid ajas pideva uitliikumise mudeleid ning vastavaid pidevaid võrrandeid. Uurides difusiooniprotsesse on oluline silmas pidada, et igasuguse suuruse levimist, mis on kirjeldatav difusioonivõrrandiga või uitliikumise mudeliga (nt impulss, ideed, hind), võib nimetada difusiooniks.

Seega leiavad difusiooniprotsessid aset ning on olulised lisaks füüsikale, keemiale ja bioloogiale ka säärastes valdkondades nagu geneetika, majandus, rahandus, arvamuste dünaamika, lingvistika (keelte evolutsioon ning levimine), populatsioonidünaamika ja teistes komplekssetes süsteemides. Üks võrrand võib kirjeldada mitmeid probleeme; sama algoritmi kasutades (või seda veidi modifitseerides) võib modelleerida vägagi erinevaid süsteeme.

Käesolev artikkel on valminud sihtfinantseeritava projekti SF0690030s09, Eesti Teadusfondi grandi 7466 ja projekti FISICOS (FIS2007-60327) toetusel.

VIITED

[1] A. Fick, Phil. Mag. 10 (1855) 30.
[2] A. Fick, Über Diffusion, Ann. Phys. 94 (1855) 59.
[3] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme gefordete Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, Ann. Phys. 17 (1905) 549.
[4] A. Einstein, Zur Theorie der Brownschen Bewegung, Ann. Phys. 19 (1906) 371.
[5] M. Smoluchowski, Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen, Annalen der Physik 21 (1906) 756.
[6] K. Pearson, The problem of the random walk, Nature 72 (1905) 294.
[7] L. Bachelier, Théorie de la spéculation, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 3 (17) (1900) 21.
[8] P. H. Cootner, (Ed.), The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, Cambridge, 1964.
[9] L. Bachelier, M. Davis, A. Etheridge, Louis Bachelier's Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance, Princeton University Press, Princeton, 2006.
[10] J. P. Bouchaud, A. Georges, Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications, Phys. Rep. 195 (1990) 127.
[11] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach, Phys. Rep. 339 (2000) 1.
[12] L. F. Richardson, Proc. Roy. Soc. 110 (1926) 709.

[13] R. Metzler, J. Klafter, The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, J. Phys. A: Math. Gen 37 (2004) R161.
[14] I. M. Sokolov, J. Klafter, A. Blumen, Fractional kinetics, Phys. Today 55 (11) (2002) 48.
[15] H. Yang, G. Luo, P. Karnchanaphanurach, T.-M. Louie, I. Rech, S. Cova, L. Xun, X. S. Xie, Protein Conformational Dynamics Probed by Single-Molecule Electron Transfer, Science 302 (2003) 262.
[16] S. C. Kou, X. S. Xie, Generalized Langevin Equation with Fractional Gaussian Noise: Subdiffusion within a Single Protein Molecule, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 180603.
[17] N. G. van Kampen, Adv. Chem. Phys. 34 (1976) 245.
[18] N. G. van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry, North-Holland, Amsterdam, 1992.
[19] H. Risken, The Fokker-Planck Equation, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
[20] C. W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
[21] M. Planck, Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 24 (1917) 324.
[22] M. v. Smoluchowski, Ann. Physik 48 (1915) 1103.
[23] E. W. Montroll, G. H. Weiss, Random walks on lattices. II, J. Math. Phys. 6 (1965) 167.
[24] G. H. Weiss, Aspects and Applications of the Random Walk, North-Holland, Amsterdam, 1994.
[25] H. Scher, M. Lax, Stochastic transport in a disordered solid. I. Theory, Phys. Rev. B 7 (1973) 4491.
[26] H. Scher, E. W. Montroll, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids, Phys. Rev. B 12 (1975) 2455.
[27] I. M. Sokolov, R. Metzler, Towards deterministic equations for Lévy walks: The fractional material derivative, Phys. Rev. E 67 (2003) 010101.
[28] R. Gorenflo, F. Mainardi, in: A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, Wien, 1997, pp. 223–276.
[29] R. Hilfer, L. Anton, Fractional master equations and fractal time random walks, Phys. Rev. E 51 (1995) R848.

[30] R. Metzler, E. Barkai, J. Klafter, Anomalous Diffusion and Relaxation Close to Thermal Equilibrium: A Fractional Fokker-Planck Equation Approach, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 3563.
[31] E. Barkai, Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application, Phys. Rev. E 63 (2001) 046118.
[32] M. v. Smoluchowski, Physikalische Zeitschr. 13 (1912) 1069.
[33] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Addison Wesley, Reading, MA, 1963.
[34] P. Reimann, Brownian motors: noisy transport far from equilibrium, Phys. Rep. 361 (2002) 57.
[35] J. M. R. Parrondo, P. Espanol, Criticism of Feynman's analysis of the ratchet as an engine, Am. J. Phys. 64 (1996) 1125.
[36] T. R. Kelly, I. Tellitu, J. P. Sestelo, Angew. Chem. Int. Ed. Engl. 36 (1997) 1866.
[37] T. R. Kelly, J. P. Sestelo, I. Tellitu, New Molecular Devices: In Search of a Molecular Ratchet, J. Org. Chem. 63 (1998) 3655.
[38] S. Lifson, J. L. Jackson, On the Self-Diffusion of Ions in a Polyelectrolyte Solution, J. Chem. Phys. 36 (1962) 2410.
[39] R. Ferrando, R. Spadacini, G. E. Tommei, Correlation functions in surface diffusion: the multiple-jump regime, Surf. Sci. 311 (1994) 411.
[40] R. Ferrando, R. Spadacini, G. E. Tommei, Diffusion in a periodic potential in the strong collision limit, Chem. Phys. Lett. 202 (1993) 248.
[41] P. Fulde, L. Pietronero, W. R. Schneider, S. Strassler, Problem of Brownian Motion in a Periodic Potential, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 1776.
[42] W. Dietrich, P. Fulde, I. Peschel, Adv. Phys. 29 (1980) 527.
[43] M. Mazroui, Y. Boughaleb, Interacting Brownian particles in a two dimensional periodic potential, Physica A 227 (1996) 93.
[44] B. Shapiro, I. Dynan, M. Gitterman, G. H. Weiss, Shapiro steps in the fluxon motion in superconductors, Phys. Rev. B 46 (1992) 8416.
[45] V. Ambegaokar, B. I. Halperin, Voltage Due to Thermal Noise in the dc Josephson Effect, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 1364.
[46] A. Barone, G. Paterno, Physics and Applications of the Josephson Effect, Wiley, New York, 1982.
[47] J. W. M. Frenken, J. F. van der Veen, Observation of Surface Melting, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 134.
[48] B. Pluis, A. W. D. van der Gon, J. W. M. Frenken, J. F. van der Veen, Crystal-Face Dependence of Surface Melting, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 2678.

[49] D. C. Senft, G. Ehrlich, Long Jumps in Surface Diffusion: One-Dimensional Migration of Isolated Adatoms, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 294.
[50] T. R. Linderoth, S. Horch, E. Laegsgaard, I. Stensgaard, F. Besenbacher, Surface Diffusion of Pt on Pt(110): Arrhenius Behavior of Long Jumps, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 4978.
[51] P. Talkner, E. Hershkovitz, E. Pollak, P. Hänggi, Controlling activated surface diffusion by external fields, Surf. Sci. 437 (1999) 198.
[52] G. I. Nixon, G. W. Slater, Entropic trapping and electrophoretic drift of a polyelectrolyte down a channel with a periodically oscillating width, Phys. Rev. E 53 (1996) 4969.
[53] D. Reguera, J. M. Rubi, A. Pérez-Madrid, Controlling anomalous stresses in soft field-responsive systems, Phys. Rev. E 62 (2000) 5313.
[54] A. I. Burshtein, Y. Georgievskii, Energy activation of adiabatic and nonadiabatic electron transfer, J. Chem. Phys. 100 (1994) 7319.
[55] W. Schleich, C. S. Cha, J. D. Cresser, Quantum noise in a dithered-ring-laser gyroscope, Phys. Rev. A 29 (1984) 230.
[56] T. Katsouleas, J. M. Dawson, Unlimited Electron Acceleration in Laser-Driven Plasma Waves, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 392.
[57] K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss, Stochastic resonance on a circle, Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 2125.
[58] C. Kurrer, K. Schulten, Noise-induced synchronous neuronal oscillations, Phys. Rev. E 51 (1995) 6213.
[59] A. G. Naumovets, Z. Zhang, Fidgety particles on surfaces: how do they jump, walk, group, and settle in virgin areas?, Surf. Sci. 500 (2002) 414.
[60] T. Ala-Nissila, R. Ferrando, S. C. Ying, Adv. Phys. 51 (2002) 949.
[61] B. S. Swartzentruber, Direct Measurement of Surface Diffusion Using Atom-Tracking Scanning Tunneling Microscopy, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 459.
[62] W. Wulfhekel, B. J. Hattink, H. J. W. Zandvliet, G. Rosenfeld, B. Poelsema, Dynamics and Energetics of Si Ad-dimers and Ad-dimer Clusters on Ge(100), Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 2494.
[63] H. J. W. Zandvliet, T. M. Galea, E. Zoethout, B. Poelsema, Diffusion Driven Concerted Motion of Surface Atoms: Ge on Ge(001), Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 1523.
[64] S. Savel'ev, F. Marchesoni, F. Nori, Controlling Transport in Mixtures of Interacting Particles using Brownian Motors, Phys. Rev. Lett. 91 (2003) 010601.

[65] S. Savel'ev, F. Marchesoni, F. Nori, Manipulating Small Particles in Mixtures far from Equilibrium, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 160602.

[66] Q. H. Wei, C. Bechinger, P. Leiderer, Single-File Diffusion of Colloids in One-Dimensional Channels, Science 287 (2000) 625.

[67] C. Lutz, M. Kollmann, C. Bechinger, Single-File Diffusion of Colloids in One-Dimensional Channels, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 026001.

[68] R. Gommers, S. Bergamini, F. Renzoni, Dissipation-Induced Symmetry Breaking in a Driven Optical Lattice, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 073003.

[69] R. Gommers, S. Denisov, F. Renzoni, Quasiperiodically Driven Ratchets for Cold Atoms, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 240604.

[70] J. F. Wambaugh, C. Reichhardt, C. J. Olson, F. Marchesoni, F. Nori, Superconducting Fluxon Pumps and Lenses, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 5106.

[71] A. Tonomura, Applications of electron holography, Rev. Mod. Phys. 59 (1987) 639.

[72] D. A. Doyle, J. M. Cabral, R. A. Pfuetzner, A. Kuo, J. M. Gulbis, S. L. Cohen, B. T. Chait, R. MacKinnon, The Structure of the Potassium Channel: Molecular Basis of K^+ Conduction and Selectivity, Science 280 (1998) 69.

[73] B. A. *et al.*, Molecular Biology of the Cell, Garland, New York, 1994.

[74] J. Kärger, D. M. Ruthven, Diffusion in Zeolites and Other Microporous Solids, Wiley, New York, 1992.

[75] S. Matthias, F. Muller, Nature 424 (2003) 53.

[76] Z. Siwy, A. Fulinski, Fabrication of a Synthetic Nanopore Ion Pump, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 198103.

[77] C. Kettner, P. Reimann, P. Hänggi, F. Müller, Drift ratchet, Phys. Rev. E 61 (2000) 312.

[78] R. D. Astumian, P. Hänggi, Brownian Motors, Phys. Today 55 (11) (2002) 33.

[79] P. Reimann, P. Hänggi, Introduction to the Physics of Brownian Motors, Appl. Phys. A 75 (2002) 169.

[80] P. Hänggi, F. Marchesoni, F. Nori, Brownian motors, Ann. Phys. (Leipzig) 14 (2005) 51.

[81] F. Jülicher, A. Ajdari, J. Prost, Modeling molecular motors, Rev. Mod. Phys. 69 (1997) 1269.

[82] N. Thomas, R. A. Thornhill, The physics of biological molecular motors, J. Phys. D 31 (1998) 253.

[83] S. Leibler, D. A. Huse, J. Cell Biol. 121 (1993) 1357.

[84] J. L. Mateos, Current reversals in deterministic ratchets: points and dimers, Physica D 168-169 (2002) 205.

[85] J. L. Mateos, Walking on ratchets with two Brownian motors, Fluct. Noise Lett. 4 (2004) L161.

[86] J. L. Mateos, A random walker on a ratchet, Physica A 351 (2005) 79.

[87] M. Patriarca, P. Szelestey, E. Heinsalu, Brownian model of dissociated dislocations, Acta Phys. Pol. B 36 (2005) 1745.

[88] G. Schoeck, W. Püschl, Mat. Sci. Eng. A 189 (1994) 61.

[89] G. Schoeck, Scripta Metal. Mat. 30 (1994) 611.

[90] R. Festa, E. G. d'Agliano, Diffusion coefficient for a Brownian particle in a periodic field of force : I. Large friction limit, Physica A 90 (1978) 229.

[91] D. L. Weaver, Effective diffusion coefficient of a Brownian particle in a periodic potential, Physica 98A (1979) 359.

[92] R. L. Stratonovich, Radiotekh. Electron. (Moscow) 3 (1958) 497.

[93] P. I. Kuznetsov, R. L. Stratonovich, V. I. T. (Eds.), Pergamon, Oxford, 1965.

[94] P. Reimann, C. van den Broeck, H. Linke, P. Hänggi, J. M. Rubi, A. Pérez-Madrid, Giant Acceleration of Free Diffusion by Use of Tilted Periodic Potentials, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 010602.

[95] P. Reimann, C. van den Broeck, H. Linke, P. Hänggi, J. M. Rubi, A. Pérez-Madrid, Diffusion in tilted periodic potentials: Enhancement, universality, and scaling, Phys. Rev. E 65 (2002) 031104.

[96] B. Lindner, M. Kostur, L. Schimansky-Geier, Fluct. Nois Lett. 1 (2001) R25.

[97] D. R. Cox, Renewal Theory, Methuen & Co., London, 1962.

[98] G. Costantini, F. Marchesoni, Threshold diffusion in a tilted washboard potential, Europhys. Lett. 48 (1999) 491.

[99] E. Heinsalu, R. Tammelo, T. Örd, Diffusion and current of Brownian particles in tilted piecewise linear potentials: Amplification and coherence, Phys. Rev. E 69 (2004) 021111.

[100] E. Heinsalu, R. Tammelo, T. Örd, Correlation between diffusion and coherence in the Brownian motion on tilted periodic potential, Physica A 340 (2004) 292.

[101] E. Heinsalu, T. Örd, R. Tammelo, Diffusion and coherence in tilted piecewise linear double-periodic potentials, Phys. Rev. E 70 (2004) 041104.

[102] E. Heinsalu, T. Örd, R. Tammelo, Peculiarities of Brownian motion depending on the structure of the periodic potentials, Acta Physica Polonica B 36 (2005) 1613.
[103] T. Örd, E. Heinsalu, R. Tammelo, Suppression of diffusion by a weak external field in periodic potentials, Eur. Phys. J. B 47 (2005) 275.
[104] M. Borromeo, F. Marchesoni, A.c.-driven jump distributions on a periodic substrate, Surf. Sci. 465 (2000) L771.
[105] A. G. Naumovets, Y. S. Vedula, Surface diffusion of adsorbates, Surf. Sci. Rep. 4 (1985) 365.
[106] R. Gomer, Diffusion of adsorbates on metal surfaces, Rep. Prog. Phys. 53 (1990) 917.
[107] M. Porto, M. Urbakh, J. Klafter, Atomic Scale Engines: Cars and Wheels, Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 6058.
[108] S. C. Wang, G. Ehrlich, Structure, stability, and surface diffusion of clusters: Ir_x on Ir(111), Surf. Sci. 239 (1990) 301.
[109] G. Kellogg, Diffusion behavior of Pt adatoms and clusters on the Rh(100) surface, Appl. Surf. Sci. 67 (1993) 134.
[110] S. C. Wang, G. Ehrlich, Diffusion of Large Surface Clusters: Direct Observations on Ir(111), Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 4234.
[111] S. C. Wang, U. Kürpick, G. Ehrlich, Surface Diffusion of Compact and Other Clusters: Ir_x on Ir(111), Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 4923.
[112] A. F. Voter, Classically exact overlayer dynamics: Diffusion of rhodium clusters on Rh(100), Phys. Rev. B 34 (1986) 6819.
[113] C.-L. Liu, J. B. Adams, Structure and diffusion of clusters on Ni surfaces, Surf. Sci. 268 (1992) 73.
[114] C. Massobrio, P. Blandin, Structure and dynamics of Ag clusters on Pt(111), Phys. Rev. B 47 (1993) 13687.
[115] J. C. Hamilton, M. S. Daw, S. M. Foiles, Dislocation Mechanism for Island Diffusion on fcc (111) Surfaces, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2760.
[116] S. V. Khare, N. C. Bartelt, T. L. Einstein, Diffusion of Monolayer Adatom and Vacancy Clusters: Langevin Analysis and Monte Carlo Simulations of their Brownian Motion, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 2148.
[117] D. S. Sholl, R. T. Skodje, Diffusion of Clusters of Atoms and Vacancies on Surfaces and the Dynamics of Diffusion-Driven Coarsening, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 3158.
[118] E. Heinsalu, M. Patriarca, F. Marchesoni, Dimer diffusion in a washboard potential, Phys. Rev. E 77 (2008) 021129.

[119] P. Hänggi, F. Marchesoni, 100 years of Brownian motion, Chaos 15 (2005) 026101.
[120] M. Borromeo, F. Marchesoni, Noise-assisted transport on symmetric periodic substrates, Chaos 15 (2005) 026110.
[121] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, Stochastic resonance, Rev. Mod. Phys. 70 (1998) 223.
[122] E. Barkai, V. N. Fleurov, Generalized Einstein relation: A stochastic modeling approach, Phys. Rev. E 58 (1998) 1296.
[123] M. Shlesinger, Asymptotic solutions of continuous-time random walks, J. Stat. Phys. 10 (1974) 421.
[124] Y. Kafri, D. K. Lubensky, D. R. Nelson, Biophys. J. 86 (2004) 3373.
[125] J. W. Haus, K. W. Kehr, Diffusion in regular and disordered lattices, Phys. Rep. 150 (1987) 263.
[126] J. P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges, P. L. Doussal, Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field, Ann. Phys. (N.Y.) 201 (1990) 285.
[127] B. Derrida, Velocity and diffusion constant of a periodic one-dimensional hopping model, J. Stat. Phys. 31 (1983) 433.
[128] I. M. Sokolov, J. Klafter, From diffusion to anomalous diffusion: A century after Einstein's Brownian motion, Chaos 15 (2005) 026103.
[129] I. Goychuk, E. Heinsalu, M. Patriarca, G. Schmid, P. Hänggi, Current and universal scaling in anomalous transport, Phys. Rev. E. 73 (2006) 020101(R).
[130] E. Heinsalu, M. Patriarca, I. Goychuk, G. Schmid, P. Hänggi, Fractional Fokker-Planck dynamics: Numerical algorithm and simulations, Phys. Rev. E 73 (2006) 046133.
[131] E. Heinsalu, M. Patriarca, I. Goychuk, P. Hänggi, Fractional diffusion in periodic potentials, J. Phys.: Condens. Matter 19 (2007) 065114.
[132] B. Lindner, L. Schimansky-Geier, Noise-Induced Transport with Low Randomness, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 230602.
[133] H. Scher, E. W. Montroll, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids, Phys. Rev. B 12 (1975) 2455.
[134] G. Bel, E. Barkai, Weak Ergodicity Breaking in the Continuous-Time Random Walk, Phys. Rev. Lett. 94 (2005) 240602.
[135] I. M. Sokolov, E. Heinsalu, P. Hänggi, I. Goychuk, Universal fluctuations in subdiffusive transport, Europhys. Lett. 86 (2009) 30009.

[136] I. M. Sokolov, A. Blumen, J. Klafter, Dynamics of annealed systems under external fields: CTRW and the fractional Fokker-Planck equations, Europhys. Lett. 56 (2001) 175.

[137] I. M. Sokolov, A. Blumen, J. Klafter, Linear response in complex systems: CTRW and the fractional Fokker-Planck equations, Physica A 302 (2001) 268.

[138] F. Barbi, M. Bologna, P. Grigolini, Linear Response to Perturbation of Nonexponential Renewal Processes, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 220601.

[139] I.M. Sokolov, Linear response to perturbation of nonexponential renewal process: A generalized master equation approach, Phys. Rev. E 73 (2006) 067102.

[140] I. M. Sokolov, J. Klafter, Field-Induced Dispersion in Subdiffusion, Phys. Rev. Lett. 97 (2006) 140602.

[141] E. Heinsalu, M. Patriarca, I. Goychuk, P. Hänggi, Use and Abuse of a Fractional Fokker-Planck Dynamics for Time-Dependent Driving, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 120602.

[142] E. Heinsalu, M. Patriarca, I. Goychuk, P. Hänggi, Fractional Fokker-Planck subdiffusion in alternating force fields, Phys. Rev. E. 79 (2009) 041137.