



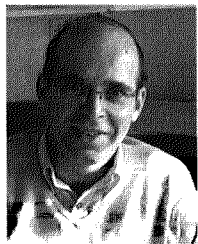
Se pueden enviar contribuciones a esta sección siguiendo el procedimiento habitual de REF o bien directamente a [anxo@math.uc3m.es](mailto:anxo@math.uc3m.es) en formato LaTeX, PostScript o PDF.

La entrega de este número conluye la serie de artículos sobre lo que el ordenador nos enseña en el terreno de los fenómenos estocásticos con un artículo sobre los efectos constructivos del ruido, en el que Raúl Toral

nos explica cómo la presencia de un cierto nivel de ruido óptimo mejora la capacidad de detectar señales en muchos sistemas. Este descubrimiento no trivial y sus desarrollos posteriores debe mucho a la capacidad de simular

procesos estocásticos con un ordenador y es un claro ejemplo de lo que la computación puede aportar a la física (y a otras ciencias, por supuesto).

**Archivo de la sección:**  
[http://gisc.uc3m.es/fisica\\_y\\_computacion](http://gisc.uc3m.es/fisica_y_computacion)



## No hay ruido bueno, pero algunos son mejores que otros

RAÚL TORAL

En el artículo publicado en dos números anteriores de esta sección habíamos definido las ecuaciones de Langevin como aquellas que incluyen términos estocásticos o "ruido". Estos términos de ruido representan aquellos grados de libertad, bien sean de origen interno o externo, cuyo comportamiento detallado se desconoce y de los que se dan únicamente sus propiedades estadísticas. Vimos entonces en detalle el ejemplo de la partícula browniana: una partícula de tamaño micrométrico que al estar inmersa en un fluido se mueve de manera aleatoria debida a los innumerables e impredecibles choques con las moléculas del fluido que la rodea. Otro ejemplo ampliamente estudiado es el de los términos de ruido presentes en los circuitos eléctricos. Este ruido que tiene su origen en muchas fuentes (agitación térmica de los electrones, impurezas en el conductor, malas conexiones, campos electromagnéticos externos, etc.) hace que la intensidad eléctrica registrada no sea una función suave, sino que fluctúe de manera aleatoria alrededor de una componente determinista determinada.

Estos y otros ejemplos pueden llevarnos a concluir que el ruido tiene un efecto que podemos calificar de manera genérica como "desordenador". El orden perfecto que se obtendría en trayectorias "limpias", sin ruido, se ve perturbado por la presencia de términos aleatorios de efecto impredecible. Si nos fijamos en la trayectoria de una partícula browniana generada por orde-

nador (ver artículo precedente) estaremos de acuerdo en calificarla como desordenada, errática. Este efecto desordenador del ruido se ve corroborado en el caso del ruido térmico, debido a la agitación molecular que aumenta con la temperatura y responsable de muchos cambios de fase. Así, un material magnético puede presentar a temperatura baja una fase ordenada (ferromagnética) en la que los momentos magnéticos de cada átomo apuntan en una misma dirección. A medida que aumentamos la temperatura, la agitación térmica hace que algunos momentos magnéticos se desvíen de la orientación común, de manera que la magnetización total disminuye hasta anularse para temperaturas superiores a la temperatura crítica de Curie.

Desde este aspecto, el ruido sería siempre una molestia, algo que debemos evitar o reducir en lo posible. Esto es compartido por algunos fabricantes de amplificadores eléctricos que anuncian sus productos como "libres de ruido", aunque si uno se lee la letra pequeña del anuncio, ve que el fabricante promete que el ruido queda *casi* reducido al térmico que es el que no se puede eliminar por muy cuidadoso y limpio que sea el diseño del amplificador (aunque disminuye con la temperatura).

Este punto de vista ha empezado a cambiar. En los últimos años se ha descubierto que un ruido de intensidad adecuada puede mejorar en vez de degradar una señal o una trayectoria. Este resultado es tanto más sorprenden-

te en cuanto se ha observado en una gran variedad de sistemas físicos o biológicos en los que se ha constatado que un cierto nivel de ruido no sólo no es molesto, sino que es necesario para un funcionamiento óptimo. Por ejemplo, se ha postulado que el movimiento de algunas proteínas dentro de la célula (movimiento ordenado ya que la proteína parte de un sitio para llegar a otro bien determinado) está inducido por un mecanismo que permite la rectificación del movimiento aleatorio propio de la proteína debido al ruido. Esta idea de aprovechar de alguna manera las fluctuaciones microscópicas para inducir movimientos ordenados dentro de la célula (o transporte entre células) ha dado lugar al amplísimo tema de motores moleculares que, desgraciadamente, no puedo explicar aquí con todo el detalle que se merece por falta de espacio [1]. De entre los muchos efectos ordenadores del ruido que han aparecido recientemente, voy a concentrarme en este artículo en el que se ha venido en llamar *resonancia estocástica*. Es éste un mecanismo genérico por el cual un sistema puede responder mejor a un estímulo externo cuando existe un cierto nivel de ruido, bien en la dinámica interna o en el mismo estímulo. Este sorprendente resultado dice que a veces es necesario estar en un entorno ruidoso para poder apreciar con claridad una señal incidente. En palabras de Jung y Wiesenfeld, que no me resisto a reproducir, "a veces es demasiado silencioso para poder escuchar un susurro" [2].

Intentaremos explicar cómo es posible este resultado. Para simplificar, consideraremos que la complicada dinámica del sistema en estudio puede aproximarse por una sencilla ecuación de Langevin de la forma:

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \xi(t). \quad (1)$$

$x$  es una variable genérica (puede ser la posición de la partícula browniana, la intensidad en un circuito eléctrico, la magnetización de un imán, la circulación oceánica, el voltaje en el axón de una neurona, la concentración de reactante en una reacción química, etc.);  $\xi(t)$  es el término de ruido, cuya intensidad denominaremos por  $\varepsilon$  y  $V$  es el llamado "potencial". En esta descripción cualitativa la expresión exacta del potencial no es importante, y consideramos la forma  $V \equiv V_0(x) = -ax^2/2 + x^4/2$  que para  $a > 0$  tiene dos mínimos equivalentes en  $x = \pm\sqrt{a}$ , mientras que para  $a \leq 0$  tiene un único mínimo en  $x=0$ . Variantes de esta ecuación se han utilizado para estudiar el efecto del ruido en distintos problemas en los que hay dos situaciones de equilibrio equivalentes. Una de las aplicaciones más imaginativas consiste en modelizar el clima global de la Tierra. Los dos pozos del potencial corresponden a períodos glaciares e interglaciares, que se diferencian por el valor de la temperatura media en toda la Tierra. Otra aplicación hace referencia a un material ferromagnético que presenta una única fase paramagnética por encima de la temperatura de Curie, mientras que para temperaturas inferiores tiene dos fases ferromagnéticas equivalentes (que difieren entre sí por un cambio de signo de la magnetización).

Si no hay ningún otro término en las ecuaciones y en ausencia de ruido (para  $\varepsilon=0$ ), la dinámica es tal que la variable  $x$  relaja a su valor de equilibrio, uno de los mínimos del potencial. En el caso  $a < 0$  solamente hay un mínimo, mientras que para  $a > 0$  qué mínimo se alcanza depende única y exclusivamente de la condición inicial. La condición inicial rompe la simetría entre los dos estados de equilibrio (que llamaremos fases [3]).

En presencia de ruido, debido al movimiento errático inducido por el término  $\xi(t)$ , la dinámica no se detiene al llegar al mínimo del potencial, y es posible pasar de un mínimo del potencial al otro en un tiempo finito.

Podemos imaginarnos a una partícula browniana moviéndose aleatoriamente a derecha e izquierda en el eje  $x$  en un paisaje cuyo perfil es  $V(x)$  (aunque no debe de ser políticamente correcto, otra visualización de la dinámica utiliza un "borracho perfecto" que se mueve en un perfil dado por  $V(x)$  de manera completamente aleatoria debido a los efectos del alcohol). Aunque a la partícula le cuesta más "subir" que "bajar" en dicho perfil, es obvio que eventualmente su camino aleatorio la llevará de un mínimo a otro del potencial. Debido a estos saltos entre los dos mínimos simétricos, tenemos que el valor medio de la variable  $x$  se anula y podemos concluir que el efecto del ruido es el de reestablecer la simetría entre las dos fases equivalentes. Esto se considera otra vez un efecto desordenador ya que el ruido mezcla las dos fases. Se puede demostrar que el tiempo medio entre saltos  $\langle t \rangle$  sigue la llamada ley de Kramer  $\langle t \rangle \sim \exp\{(\Delta V/\varepsilon)$  donde  $\Delta V$  es la altura de la barrera de potencial que separa a los dos mínimos. Utilizando el algoritmo explicado en el artículo anterior para la integración numérica de la ecuación de Langevin, podemos obtener una trayectoria que muestra claramente que la partícula visita ambos mínimos (ver panel (a) de la figura).

Supongamos ahora que hay una perturbación externa actuando sobre el sistema.

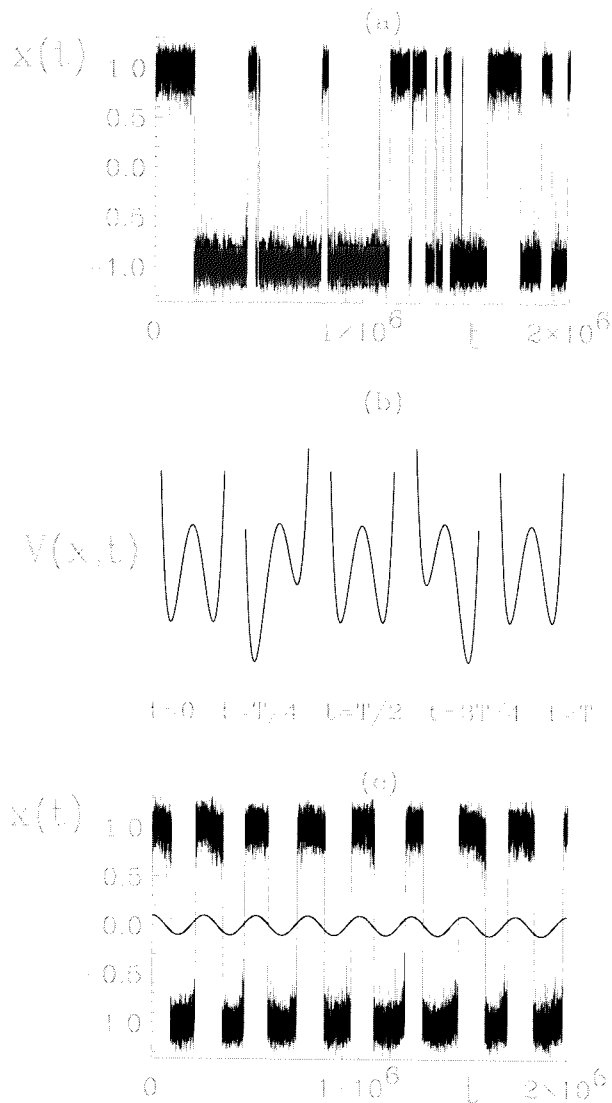
Concretamente, consideremos una perturbación periódica, de amplitud  $A$  y frecuencia  $\Omega$ , cuyo efecto es el de modificar el potencial a  $V(x,t) = V_0(x) + Ax \sin(\Omega t)$ . Estudiemos primero el caso determinista donde la dinámica no tiene términos de ruido. Si  $A$  es pequeño, las variaciones en el potencial serán tales que se disminuirá la barrera entre los mínimos, pero sin que llegue a desaparecer dicha barrera (ver panel (b) de la figura). De esta manera se volverá a romper la simetría entre los mínimos: dependiendo de la condición inicial, el sistema escogerá uno de los dos mínimos y oscilará ligeramente alrededor de él, pero sin ser capaz de pasar de un mínimo a otro. En definitiva, una perturbación de amplitud suficientemente débil no es capaz de inducir saltos de una fase a otra.

Consideremos ahora la presencia adicional de términos de ruido. En este caso, los saltos entre mínimos provocados por el movimiento aleatorio debido al término de ruido se producen con una mayor probabilidad en el momento

en que el término de forzamiento periódico hace que la barrera de potencial tenga un valor mínimo ( $t=T/4$  o  $t=3T/4$  en panel (b) de la figura). De manera que se incrementa la probabilidad de los saltos en cada medio periodo del forzamiento externo. Si se cumple que el tiempo medio de salto entre mínimos es igual a medio periodo del potencial  $\langle t \rangle = \pi / \Omega$  se da una condición de resonancia y los saltos entre mínimos se dan con una periodicidad aproximadamente igual a la de la perturbación externa (ver panel (c) de la figura). Si el ruido se incrementa muchísimo, es claro que los saltos se producirán de manera totalmente aleatoria y otra vez descorrelacionada con la periodicidad de la perturbación externa. Así, el movimiento sigue fielmente la perturbación externa *sólo para el nivel óptimo de la intensidad del ruido*, ni demasiado alto, ni demasiado bajo.

En el mencionado modelo de clima global, la perturbación periódica se asocia con la variación de la excentricidad de la órbita terrestre debida a perturbaciones planetarias, con un periodo aproximado de 100.000 años. Estas variaciones son por sí solas insuficientes para provocar el paso de un mínimo a otro (correspondiente a pasar de una época glacial a una interglacial). Los términos de ruido representan, entre otras contribuciones, las fluctuaciones en la radiación solar [4]. De esta manera, la periodicidad de las glaciaciones podría explicarse mediante un fenómeno de resonancia inducida por fluctuaciones o de *resonancia estocástica* [5].

Más allá del ejemplo concreto de las glaciaciones terrestres, la lección principal que nos enseña la resonancia estocástica es que la respuesta de un sistema a un forzamiento externo puede mejorar si hay un cierto nivel de ruido, bien en la propia señal externa, bien en la dinámica interna del sistema. En el firme establecimiento de este sorprendente resultado han desempeñado un importantísimo papel las simulaciones por ordenador que han permitido estudiar las condiciones precisas para que el efecto sea óptimo. Con posterioridad se ha corroborado experimentalmente en muchas ocasiones, incluyendo la respuesta de seres vivos a estímulos externos. Los distintos receptores sensoriales de un ser vivo puede modelarse de manera mínima mediante una variable que represente dos estados: inactivo o excitado [6]. Un razoma-



**Figura 1.** (a) Trayectoria de una partícula que se mueve de acuerdo con (1) en un potencial biestable con ruido. (b) Efecto del forzamiento externo periódico en el potencial. (c) Trayectoria mostrando en efecto combinado del ruido y el forzamiento periódico: el caso de resonancia estocástica. Obsérvese como el salto entre mínimos está sincronizado con las variaciones sinusoidales del potencial.

miento parecido al anterior nos dice que es más fácil pasar del estado inactivo al excitado en correlación con las variaciones del estímulo externo si existe un nivel de ruido adecuado.

Se han realizado unos ya famosos experimentos en una especie particular de langosta con un sistema receptivo preparado para detectar ondas en el fluido que la rodea, ondas provenientes, por ejemplo, de un animal que se acerca [7]. Se pudo demostrar que los receptores respondían con más sensibilidad a una excitación débil, si ésta contenía un cierto nivel de ruido. Otro ejemplo hace referencia a la mejora de la percepción visual de una imagen que es demasiado débil para excitar la reti-

na, pero que puede ser observada con relativa nitidez cuando se la añade un cierto ruido completamente descorrelacionado con la imagen [8].

Experimentos recientes en humanos miran el umbral de percepción táctil a un determinado estímulo [9]. En concreto, una persona pone su mano encima de una placa que vibra con pulsos de una amplitud suficientemente pequeña para no ser percibida. Cuando a este impulso se le añade una cierta cantidad de ruido el sujeto es capaz de percibir los pulsos. Se ha sugerido, incluso, que se podrían diseñar guantes que añadiesen un cierto ruido de manera que la percepción táctil mejorara en personas con algún tipo de discapacidad. Aunque probablemente esta sugerencia entre dentro del reino de lo especulativo, hay actualmente una gran actividad para determinar si la resonancia estocástica que se consigue en sistemas biológicos en condiciones de laboratorio, tiene realmente alguna efectividad en condiciones naturales. Hay experimentos que indican que este fenómeno puede ser responsable de la capacidad de algunos tiburones de detectar campos eléctricos extremadamente débiles [10], y se ha especulado que la selección natural ha desarrollado este mecanismo de detección de señales débiles cuya principal ventaja es la de trabajar en ambientes naturales en los que las señales que recibe un animal no son "limpias" sino que tienen una gran componente de aleatoriedad.

Resumiendo, el ruido ha pasado de ser algo a evitar a ofrecer un mecanismo por el que se puede aumentar la sensibilidad de respuesta a estímulos externos. He dejado para el final un resultado que muestra que una señal eléctrica se transmite de neurona en neurona de manera mucho más clara si existe un cierto nivel de ruido en la señal

[10]. Es decir, que es posible que nuestro propio cerebro pueda procesar mejor la información que le llega si ésta contiene un cierto nivel permante de ruido. Si me permiten una frívola reflexión final, mientras que esto puede explicar el que algunas personas parezcan estar a gusto en un ambiente ruidoso, yo seguiré prefiriendo la armonía de una sinfonía de Mozart al tubo de escape de una moto. Cuestión de gustos, supongo.

## Referencias

- [1] Se ha publicado recientemente un amplio artículo de revisión de nivel avanzado desde el punto de vista físico: P. REIMANN, Brownian motors: noisy transport far from equilibrium, *Physics Reports* **361**, 57-265 (2002).
- [2] P. Jung and K. Wiesenfeld, Too quiet to hear a whisper, *Nature* **385** 291 (1997).
- [3] Esto constituye un cierto abuso de notación, ya que una auténtica fase termodinámica corresponde a una región espacialmente extendida, lo que no es el caso aquí, ya que  $x$  es una variable sin dependencia espacial.
- [4] Es claro que este ruido tiene un tiempo de correlación característico del orden de años que es mucho menor que el periodo del potencial. Por dicho motivo es justificado utilizar la aproximación de ruido blanco con tiempo de correlación cero.
- [5] Recientemente, se ha sugerido que el modelo para el clima de la Tierra no debe ser el de un sistema biestable, sino excitable. En este caso el forzamiento periódico es debido a variaciones de flujo del agua recibida por los océanos. Esto parece corresponder más a la realidad que el sencillo modelo explicado aquí.
- [6] En realidad, algo más apropiado que un potencial con dos mínimos, donde cada uno representaría el estado inactivo o excitado, consiste en un sistema excitable, en el que el estado inactivo representa un punto fijo estable, mientras que el estado excitado viene dado por un pulso de la variable dinámica.
- [7] K. WIESENFELD et al. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2125 (1994).
- [8] E. SIMONOTTO et al. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1186 (1997). Hay una sorprendente demostración en la página web: <http://neurodyn.umsl.edu/sr/>
- [9] J. COLLINS et al. *Nature* **383**, 770 (1996); *Phys. Rev.* **E56**, 923 (1997).
- [10] El volumen 8, no. 3 (1998) de la revista *Chaos* se dedica íntegramente al efecto constructivo de las fluctuaciones y da varios ejemplos del papel destacado de la resonancia estocástica en el aumento de la capacidad de percepción en diversos tipos de animales.

**Raúl Toral**  
IMEDEA, CSIC y  
Universidad de las Islles Balears