

ÚLTIMOS AVANCES EN EL MOVIMIENTO BROWNIANO: ORDEN A PARTIR DEL DESORDEN

Raúl Toral

Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados (IMEDEA). CSIC-Universitat de les Illes Balears, Palma de Mallorca, Spain

Para muchas personas, la física es el paradigma del determinismo: es posible utilizar las leyes de la física para predecir la futura evolución de un sistema. El ejemplo emblemático es el de los movimientos planetarios que se pueden anticipar con mucha antelación y precisión y donde cualquier desviación de las predicciones teóricas se atribuye a factores no tenidos en cuenta. Así, las discrepancias entre las observaciones de la órbita de Urano y las leyes de la gravitación se resolvieron con el descubrimiento del planeta Neptuno, a partir de cálculos de Urbain Leverrier. Ello nos puede llevar a creer que todo movimiento futuro está firmemente impreso en unas leyes de la naturaleza.

Este punto de vista, que es exagerado en la enseñanza tradicional de la física, tiene su máxima expresión en las palabras de Pierre Simon de Laplace quien en la introducción de su tratado “Teoría analítica de las probabilidades” escribe en 1814:

“Debemos considerar el estado presente del universo como el efecto del estado anterior y como la causa del que le seguirá. Una inteligencia que en un instante dado conociera todas las fuerzas presentes en la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, y que fuera por otra parte suficientemente amplia como para someter esos datos al análisis, incluiría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos mayores del universo, así como los del átomo más ligero; nada sería incierto para ella y tanto el futuro como el pasado le sería visible.”

La visión determinista del universo se puede expresar más alto, pero no más claro. Sin embargo, este punto de vista no se considera correcto hoy en día. Existen al menos tres factores que echan por tierra la visión determinista de Laplace.

En primer lugar, la mecánica cuántica, a través del principio de incertidumbre de Heisenberg, pone límites a la precisión con la que podemos conocer las velocidades y posiciones de cualquier sistema. Esta limitación es inevitable y nace del hecho de que el proceso de medida necesariamente perturba aquello que se quiere medir. Ciertamente, la imprecisión puede ser pequeña para sistemas macroscópicos pero, en cualquier caso, nos limita el conocimiento arbitrariamente preciso de las condiciones iniciales.

El segundo factor es el de la existencia de movimientos caóticos para los que una pequeña imprecisión en la condición inicial tiene unas enormes consecuencias en la evolución a largos tiempos. Es costumbre, a la que no puedo sustraerme, el ejemplarizar el caos mediante el efecto mariposa: “el batido de las alas de una mariposa en Brasil puede generar un tornado en Texas” tomado de una conferencia que Edward Lorenz dictó en 1972. ¡No debemos extrañarnos de que sea tan difícil predecir el tiempo atmosférico! Sabemos hoy que el comportamiento caótico o sensibilidad a las condiciones iniciales es genérico para muchos sistemas no lineales.

El tercer y último factor que echa por tierra el determinismo de Laplace es de orden puramente práctico. El número de constituyentes de cualquier sistema macroscópico es inimaginablemente alto y no es posible de ninguna manera el recoger y procesar la información sobre las condiciones iniciales de todos los constituyentes. Es incluso dudoso que pueda existir una “inteligencia suficientemente amplia” ya que ella misma tendría también un número ingente de constituyentes (posiblemente mayor que el número de partículas que quiere describir) cuya evolución también debiera incluir en sus cálculos. El orden de magnitud del número de átomos que forman un gramo de un sistema macroscópico es el número de Avogadro, o alrededor de 10^{23} . Es difícil hacerse una idea de la magnitud de este número que es comparable al número de granos de arena en una playa de varios kilómetros de longitud. Tenemos que aceptar que no es posible siquiera conocer las condiciones iniciales de todas esas partículas. El darse cuenta de la imposibilidad de una descripción detallada, determinista, de un sistema macroscópico, nos abre las puertas para otras descripciones más útiles y, quizás paradójicamente, con más poder de predicción efectivo. Einstein, en uno de los artículos de su “annus mirabilis” de 1905 introdujo una de tales descripciones para tratar el problema del llamado movimiento browniano, un problema que durante muchas décadas había permanecido sin resolver.

Robert Brown fue un botánico escocés que a principios del siglo XIX estaba estudiando la polinización de un cierto tipo de planta, *Clarkia pulchella*, para lo que observaba bajo

el microscopio una suspensión de granos de polen en agua. Observó que había unas pequeñas partículas alrededor de los granos de polen (posiblemente provenientes de la superficie de los granos mismos) que estaban en constante e irregular movimiento. Como corresponde a un buen científico, no se contentó con observar, sino que quiso describir y ver hasta qué punto este movimiento que veía en el microscopio era atribuible a alguna propiedad del polen o era algo más general. Preparó, pues, suspensiones de diversas sustancias finamente pulverizadas en agua y otros líquidos y comprobó que en todas ellas podía observar ese incesante movimiento cuyo origen no supo explicar. En palabras del propio Brown traducidas de su artículo "Sobre la existencia general de moléculas activas en cuerpos orgánicos e inorgánicos" de 1829, leemos:

"Que partículas extremadamente pequeñas de materia sólida, obtenidas a partir de sustancias orgánicas o inorgánicas, cuando están suspendidas en agua pura, o en algún otro fluido acuoso, muestran movimientos que no sé explicar, y que en su irregularidad y aparente independencia, se parecen remarcablemente a los movimientos menos rápidos de algunos de los animáculos más sencillos en infusiones. Que las partículas más pequeñas observadas, y que he llamado moléculas activas, parecen ser aproximadamente esféricas y tienen un diámetro entre 1 y 2 micras, y que otras partículas mayores y de diversos tamaños, del mismo o diferente aspecto, también presentan movimientos análogos en circunstancias parecidas."

Se ha comprobado que otros investigadores con anterioridad habían visto el movimiento browniano, pero nadie antes que Brown había considerado que valía la pena llevar a cabo un estudio detallado del fenómeno que, justamente, lleva su nombre.

La explicación del origen del movimiento browniano tuvo que esperar mucho tiempo. Parece ser que Boltzmann dio en el clavo cuando escribió en 1896: *"Pequeñas partículas en un gas ejecutarán movimientos debidos a que la presión en la superficie de las partículas puede fluctuar."* Esas fluctuaciones en la fuerza que actúa sobre las partículas es debida a los impredecibles choques de las moléculas del fluido con la partícula. No sabemos si Einstein conocía este artículo de Boltzmann cuando escribió en 1905¹:

"[...] según la teoría cinético-molecular del calor, cuerpos de tamaño visible pero microscópico suspendidos en un fluido efectuarán movimientos de tal magnitud que se puedan observar fácilmente en un microscopio. Es posible que esos movimientos sean idénticos al denominado movimiento molecular browniano."

Imaginemos la situación (ver figura1): una "partícula browniana" con un tamaño de, digamos, una micra (10^{-6} m) está rodeada de moléculas con un tamaño miles de

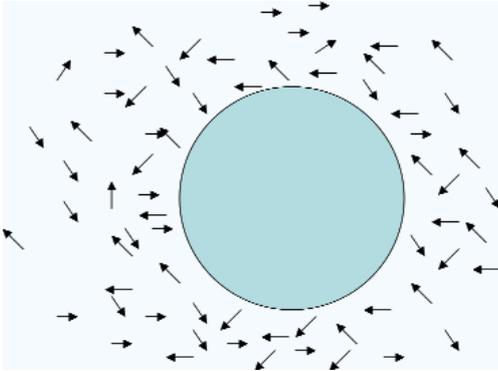


Figura 1: Una partícula browniana sometida a choques con las moléculas del fluido.

cciones y son tantas las moléculas involucradas, su efecto neto debiera ser cero (tantos choques de arriba a abajo como de abajo a arriba, tantos de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, etc.). Sin embargo, hay diferencias debidas al azar

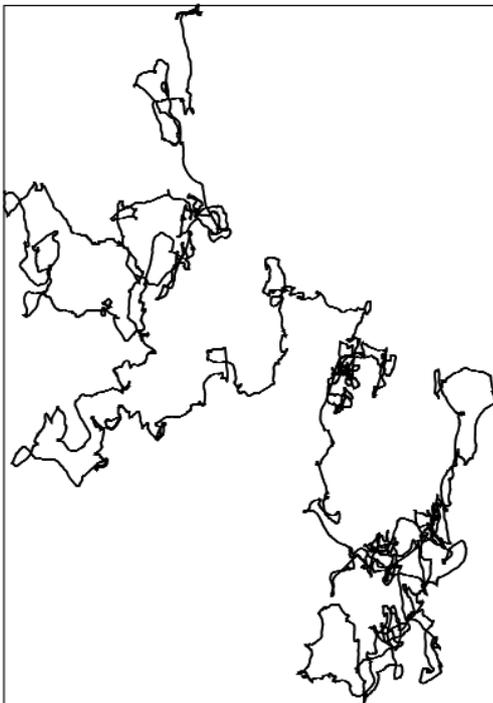


Figura 2: Trayectoria característica de la partícula browniana.

veces inferior (el tamaño característico de una molécula de agua es alrededor de 1Å o 10^{-10}m) con velocidades típicas de varias decenas de metros por segundo que la golpean por todas direcciones. El choque con una molécula es casi imperceptible para la partícula con una masa millones de veces mayor. Sin embargo, son tantos choques que su efecto se acumula y la partícula se acaba desplazando. Como los movimientos de las moléculas ocurren en todas direcciones

en el número de colisiones en ambos sentidos y se produce el movimiento errático típico de la partícula browniana, véase la figura 2. Laplace nos diría que si fuéramos capaces de conocer las posiciones y velocidades detalladas de todas las moléculas alrededor de la partícula y conociéramos exactamente las fuerzas que provocan las colisiones, podríamos predecir exactamente el movimiento de las moléculas y, por consiguiente, el de la partícula. Einstein fue el primero en darse cuenta de que esa descripción maximalista de Laplace era imposible y en sugerir una descripción alternativa del movimiento browniano.

La formulación de Einstein sustituye la descripción determinista por otra probabilística. Para ello se fija en la variación de la posición de la partícula

browniana a intervalos de tiempo τ . Si tomamos instantáneas separadas por un tiempo τ veremos que la posición de la partícula cambia de una a otra en un desplazamiento $\vec{\delta}$ que no es constante sino que fluctúa de observación a observación. Es esencial que el intervalo temporal τ sea mayor que los tiempos típicos de colisión que son del orden de 10^{-12} s, pero a su vez que sea menor que los tiempos macroscópicos de observación (del orden del segundo o algo inferior). Digamos que τ es del orden de 10^{-6} s. Einstein introduce la función densidad de probabilidad, $f(\vec{\delta})$, de manera que $f(\vec{\delta})d\vec{\delta}$ representa la probabilidad de que la variación de la posición al cabo de un tiempo τ esté en el intervalo $(\vec{\delta}, \vec{\delta} + d\vec{\delta})$. No es necesario intentar describir la forma detallada de $f(\vec{\delta})$. Podemos intuir, debido a la ley de los grandes números, que tendrá una forma gaussiana, pero realmente lo único que nos hace falta suponer es que es simétrica en las tres direcciones espaciales o, lo que es lo mismo, que las colisiones no favorecen ninguna dirección o sentido, de manera que:

$$\int d\vec{\delta} \vec{\delta} \cdot f(\vec{\delta}) = 0$$

Ahora Einstein considera la densidad de probabilidad, $n(\vec{r}, t)$, definida de manera que la probabilidad de que la partícula browniana esté en el intervalo $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r})$ en el tiempo t es $n(\vec{r}, t)d\vec{r}$. Es fácil escribir la manera en la que cambia $n(\vec{r}, t)$ entre instantáneas:

$$n(\vec{r}, t + \tau) = \int d\vec{\delta} f(\vec{\delta}) n(\vec{r} - \vec{\delta}, t)$$

Traducida a palabras, esta ecuación nos dice que la probabilidad de que una partícula esté en el lugar \vec{r} en la foto tomada en el tiempo $t + \tau$ es igual a la probabilidad de que estuviera en el lugar $\vec{r} - \vec{\delta}$ en el tiempo t multiplicada por la probabilidad de que se haya desplazado una distancia $\vec{\delta}$ en el intervalo de tiempo τ , integrada para todas las distancias $\vec{\delta}$. Esta ecuación, que expresa con una pasmosa sencillez la evolución de la probabilidad de observación de la posición de la partícula browniana, se conoce con el nombre de ecuación de Chapman-Kolmogorov.

Desarrollando en doble serie de Taylor (en \vec{r} y t) la anterior ecuación, Einstein llega a la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\vec{r}, t)$$

estando relacionado el coeficiente de difusión D con el segundo momento de la distribución $f(\vec{\delta})$. Con otro tipo de argumentos, Einstein relaciona el coeficiente de difusión con otras propiedades tales como la temperatura del fluido, el coeficiente de fricción y la constante de Boltzmann. La solución de la ecuación de difusión, que está explicada en muchos libros de física, se comporta como uno espera intuitivamente: al no haber una dirección privilegiada, la partícula browniana no se mueve en promedio:

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = 0$$

Sin embargo, a medida que pasa el tiempo aumenta la probabilidad de que la partícula esté en lugares cada más alejados de punto inicial donde empezó el movimiento. El cálculo detallado lleva a que el desplazamiento cuadrático medio es proporcional al tiempo:

$$\langle \vec{r}(t)^2 \rangle = 6Dt$$

una predicción teórica comprobada experimentalmente por Jean Baptiste Perrin, entre otros. Es fácil dejarse engañar por la aparente sencillez de este resultado. La predicción de que el desplazamiento cuadrático medio de la partícula browniana sea proporcional al tiempo constituye uno de los resultados más importantes de la física puesto que este efecto es una causa **directa** de la existencia de los átomos. En una época en que la naturaleza atómica de la materia se explica en los libros de texto de primaria, no hay que olvidar que la polémica sobre la existencia de los átomos se originó en la Grecia clásica, y que todavía a principios del siglo XX, físicos muy respetables (por ejemplo Ernst Mach, cuya filosofía tanto influyó en los trabajos del joven Einstein sobre la teoría de la relatividad, por otra parte) negaban la existencia de los átomos y, a lo más, les otorgaban una especie de entidad como "representación mental" útil de la realidad, pero no como la realidad misma. La verificación experimental de la predicción de Einstein constituyó el espaldarazo definitivo a la teoría atómica. Además, la fórmula de Einstein decía a los experimentalistas en qué debían fijar su atención. Hasta entonces, los esfuerzos experimentales se habían centrado en caracterizar la velocidad de la partícula, un trabajo abocado al fracaso debido a su carácter errático.

Fue Paul Langevin quien en 1907 reinterpreto los resultados de Einstein mediante la introducción de una fuerza aleatoria. El razonamiento de Langevin divide el efecto de las innumerables colisiones de los átomos contra la partícula browniana en una componente determinista que tiende a frenar la velocidad de dicha partícula (y que se puede aproximar por una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, $-\gamma \vec{v}$, siendo γ el coeficiente de rozamiento) y una componente aleatoria, $\vec{\zeta}(t)$, que da cuenta

del hecho de que no conocemos en detalle las interacciones que se están produciendo en cada instante de tiempo. Langevin escribe así la ecuación de movimiento de Newton “fuerza igual a masa por aceleración” como:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\gamma \vec{v} + \vec{\zeta}(t)$$

una ecuación que hoy en día lleva el nombre de Langevin y en la que a la parte estocástica de la fuerza se la conoce como “ruido”. El ruido representa aquella componente de la fuerza que no se puede conocer con toda precisión debido a la falta de conocimiento detallado de las posiciones y velocidades de los átomos en todo momento. Se abandona otra vez una descripción maximalista *à la Laplace*, y la componente estocástica de la fuerza se describe probabilísticamente, dando sus propiedades estadísticas. Esta descripción es particularmente sencilla: dado que el ruido es una fuerza debida a la acción de un gran número de contribuciones, invocamos el teorema del límite central para utilizar una distribución gaussiana para cada una de las componentes de $\vec{\zeta} = (\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$, y es sabido que para caracterizar una distribución gaussiana basta dar el valor medio y las correlaciones. Según la discusión general, el valor medio de cada componente de la fuerza ha de ser cero, $\langle \zeta_x(t) \rangle = \langle \zeta_y(t) \rangle = \langle \zeta_z(t) \rangle = 0$, ya que no se favorece ninguna dirección espacial. Las diferentes direcciones x, y, z son independientes entre sí. Por último, debido a la invariancia temporal, la correlación entre el valor de la fuerza en dos tiempos sólo puede ser una función de la diferencia de tiempos, $\langle \zeta_i(t) \zeta_i(t') \rangle = C(t-t')$. Como los valores de la fuerza sólo pueden estar correlacionados a una escala temporal τ_0 del orden del tiempo característico de una colisión, la función de correlación del ruido se aproxima mediante un decaimiento exponencial con el tiempo característico τ_0 :

$$C(t-t') = \frac{G}{\tau_0} e^{-\frac{|t-t'|}{\tau_0}}$$

Aquí G es una constante que mide la intensidad del ruido. Dado que el tiempo de correlación τ_0 es mucho menor que el tiempo característico de observación del movimiento de la partícula browniana, como hemos discutido con anterioridad, se toma la aproximación $\tau_0 \rightarrow 0$, que lleva a que la función de correlación sea una delta de Dirac:

$$C(t-t') = 2G\delta(t-t')$$

En esta aproximación, se dice que $\vec{\zeta}$ es un ruido “blanco”². Resolviendo la ecuación

de Langevin es posible obtener que las fluctuaciones en la posición de la partícula browniana crecen ligeramente con el tiempo $\langle \vec{r}(t)^2 \rangle = \frac{6G}{\gamma^2} t$, como en el tratamiento de

Einstein, de manera que el coeficiente de difusión es $D = \frac{G}{\gamma^2}$. Un razonamiento basado en el teorema de equipartición de la energía permite llegar a que la intensidad de ruido G es proporcional a la temperatura $G = \gamma kT$, con lo que se deduce $D = \frac{kT}{\gamma}$, la misma fórmula obtenida por Einstein y que permitió una medida de la constante de Boltzmann k , dando el espaldarazo definitivo a la teoría atómica.

La formulación de Langevin, que escribe una ecuación para las trayectorias con una componente estocástica de la fuerza, y la de Einstein, que trata directamente con las probabilidades de encontrar a la partícula browniana en un determinado punto del espacio, ofrecen dos puntos de vista alternativos y son completamente equivalentes en cuanto a predicciones y resultados. Ambos puntos de vista se siguen utilizando hoy en día, aunque el de Langevin es más intuitivo al permitir visualizar trayectorias de partículas individuales mediante una integración numérica de las ecuaciones de movimiento.

Desde estos trabajos pioneros de Einstein y Langevin se escucha ruido en todas partes. Si buscamos en la base de datos del ISI encontramos más de 50,000 referencias con la palabra “noise” en el título. Una búsqueda en las revistas de la Sociedad Americana de Física, nos da más de mil artículos conteniendo “noise” en el título o en el resumen. Algunas de las áreas en las que aparecen dichos artículos son: circuitos electrónicos, circulación oceánica, modelos de predicción del tiempo, emisión de luz láser, crecimiento de superficies, dinámica de poblaciones y epidemias, reacciones químicas, neuronas, etc. No podemos de ninguna manera dar una descripción, aunque sea somera, de todos y cada uno de los temas en los que aparece el concepto de ruido, pero vamos a centrarnos en algunos de ellos.

La idea de ruido tuvo una de sus primeras aplicaciones en los circuitos eléctricos. Las corrientes eléctricas son el resultado del movimiento de electrones en un conductor. En ese movimiento los electrones interactúan (“chocan”) con los átomos del conductor (y entre los mismos electrones) de una manera que no se puede describir en

detalle debido al número ingente de variables en consideración. Este “ruido” electrónico provoca fluctuaciones medibles en la intensidad que circula por el circuito. Estas fluctuaciones aumentan con la temperatura y provocan que cuando el circuito se conecta a un altavoz, se escuche un murmullo de fondo, que es el origen del término “ruido” aplicado a la fuerza estocástica. Aparte de esta fuente intrínseca de impredecibilidad, de ruido, existen otras componentes estocásticas debidas a agentes externos, tales como una soldadura defectuosa, interferencias electromagnéticas, fluctuaciones en el voltaje proporcionado por la fuente de alimentación, etc. Todas estas componentes se conocen con el nombre genérico de “ruido externo” a diferencia del ruido anterior de carácter intrínseco o “ruido interno”. Normalmente, como el ruido externo tiene un origen en algún otro componente macroscópico del sistema, no suele ser cierto que su tiempo característico sea mucho menor que el tiempo de observación y la aproximación de ruido blanco no es siempre adecuada.

Veamos otro ejemplo de presencia de ruido en un ámbito completamente distinto. Los modelos más sencillos de propagación de epidemias dividen a la población en personas susceptibles de ser infectadas (S), infectadas (I) y recuperadas de la infección y, por tanto, inmunes (R). Estos modelos SIR consideran en primera aproximación que los ritmos de crecimiento de las poblaciones S, I o R dependen unívocamente del número de personas S, I o R. Así el ritmo de crecimiento del número de infectados es proporcional al número de contactos S-I. Sin embargo, es bien sabido que un contacto entre una persona susceptible y una infectada no lleva necesariamente a que la persona sana se infecte, sino que hay una cierta componente estocástica en el proceso de contagio. Esta componente estocástica, se incorpora a la descripción mediante unos términos de ruido adecuados en las ecuaciones de ritmo, en la manera cómo nos enseñó Langevin.

Otro ejemplo, la circulación de corrientes oceánicas es un complejo proceso donde intervienen fuerzas macroscópicas bien determinadas (la fuerza de Coriolis, por ejemplo) con otras componentes que no se pueden determinar con precisión debidas, por ejemplo, al forzamiento de los vientos sobre la superficie marina, irregularidades en el fondo marino, etc. Otra vez, estas componentes estocásticas se describen mediante ecuaciones de Langevin con unos términos de ruido adecuados.

Veamos un último ejemplo: nuestro cerebro consta de un gran número de neuronas altamente interconectadas. Las neuronas se envían entre ellas pulsos eléctricos que son responsables de las funciones cerebrales. Aunque existen buenas descripciones del comportamiento de una neurona aislada, lo cierto es que debido al alto número de conexiones es imposible conocer con toda precisión las corrientes eléctricas que

entran en una neurona en un momento determinado y, por consiguiente, la manera precisa en que una neurona emitirá pulsos a su vez. Este desconocimiento se plasma en la adición de términos de ruido a las ecuaciones. Así por ejemplo, el modelo de FitzHugh-Nagumo para el potencial eléctrico, v , en un axón, se escribe en la forma:

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = v(v-a)(1-v) - \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = v - w - b + \zeta(t)$$

ω es una variable auxiliar relacionada con la concentración de iones; a , b y ε son parámetros de este modelo neuronal. Aquí reconocemos otra vez nuestro ya familiar término de ruido $\zeta(t)$.

Nos está pasando como a Monsieur Jourdain, quien hablaba en prosa sin saberlo. ¡Acabamos de aprender el concepto de ruido y ahora resulta que está presente en casi todas partes y nadie nos lo había dicho! Nuestra idea general es que, a pesar de esta ubicuidad, el ruido es fuente de imprecisión y, en el fondo, es algo que nos gustaría eliminar o reducir al máximo posible. Veamos, por ejemplo, el caso de los circuitos eléctricos. Cualquier melómano estará de acuerdo en que conviene reducir al máximo los términos de ruido (sean externos o internos) de manera que la señal sea lo más “limpia” posible y no introduzca componentes aleatorias indeseadas cuando el circuito eléctrico sea usado, por ejemplo, para amplificar pequeñas corrientes que almacenan la información sobre una grabación musical. De hecho hay fabricantes de amplificadores que se jactan de reducir el nivel de ruido al “térmico”, o sea al ruido interno que no se puede eliminar por muy perfecta que sea la construcción del amplificador; por cierto, que el precio de eliminar el ruido es muy alto: estos amplificadores son especialmente caros.

Utilizando un dicho inglés muy popular podemos afirmar que “no hay ruido que sea bueno” y estaríamos muy contentos si pudiéramos minimizar en lo posible las fuentes de ruido. Sin embargo, en los últimos veinte y pocos años se han encontrado situaciones en las que la presencia de un cierto nivel de ruido puede, sorprendentemente, mejorar las prestaciones de un sistema, tal como una mejor respuesta a un estímulo externo. También es posible utilizar una fuente de ruido para inducir algún tipo de movimiento ordenado en un sistema. Estas situaciones se han etiquetado como “efecto carraca” (“ratchets”) o “rectificación de fluctuaciones”, “resonancia estocástica”, “coherencia estocástica” o “resonancia de coherencia”, “sincronización inducida por ruido”, “transiciones de fase inducidas por ruido”, etc. Todos estos resultados muestran situaciones en las que la presencia de ruido “mejora” en algún sentido la conducta de un sistema.

Otra vez, el tema ha crecido demasiado como para poder relatar aquí, aunque sea brevemente, todos estos efectos. No me resisto a mencionar que se ha propuesto un mecanismo biológico para el transporte vesicular a lo largo de microtúbulos utilizando el ruido al que está necesariamente sujeto un vesículo y el hecho de que el microtúbulo tiene una estructura asimétrica. De confirmarse este mecanismo, resultaría que la presencia de ruido es fundamental para la posible realización de los fenómenos de transporte más elementales y para la misma existencia de la vida.

El tema en el que quisiera centrarme en adelante es el conocido como “**resonancia estocástica**”, un mecanismo por el cual un sistema amplifica o reacciona mejor a un estímulo externo cuando hay un nivel de ruido adecuado. Se ha demostrado que este mecanismo está presente en el sistema nervioso de muchos animales de manera que la percepción sensorial se ve incrementada por la presencia de ruido, algo extremadamente contraintuitivo.

Para explicar este fenómeno de resonancia estocástica, debemos remontarnos al año 1981 en el que dos grupos de científicos, independientemente, propusieron el mismo mecanismo de amplificación en presencia de ruido para explicar la existencia de épocas glaciales y cálidas en la historia de la Tierra^{3,4}. Es conocido que estas épocas se suceden con una periodicidad aproximada de unos 100,000 años y la sencilla pregunta (que siempre se hace la Ciencia) es ¿por qué?

Existe, efectivamente, un mecanismo por el cual la radiación recibida del Sol oscila con un periodo aproximado de 100,000 años. La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol no es perfectamente circular, sino elíptica y los ejes de la elipse se deforman por la influencia gravitatoria combinada del resto de los planetas de manera que la distancia media al Sol, y por consiguiente la radiación recibida, cambia con ese periodo ya mencionado. El problema es que esa variación periódica en la radiación solar recibida es demasiado pequeña para poder inducir un cambio de un clima cálido a un clima glacial o viceversa. Hace falta un mecanismo que amplifique esa pequeña señal. El mecanismo que se propuso, denominado “resonancia estocástica”, requería la presencia de fluctuaciones, de ruido, en definitiva.

Para poder explicar la resonancia estocástica, vamos a considerar el sistema biestable más sencillo posible⁴. Este sistema corresponde a una única variable x (representando la temperatura media de la Tierra, por ejemplo) cuya evolución es tal que prefiere estar en uno de dos estados, digamos $x = +1$ o $x = -1$. La ecuación dinámica más sencilla que tiene este comportamiento es:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3$$

En efecto, si la condición inicial es $x(t=0) > 0$ entonces la dinámica lleva en $t \rightarrow +\infty$ a $x = +1$, mientras que $x(t=0) < 0$ lleva a $x = -1$ en el mismo límite de tiempos grandes. Es posible visualizar la trayectoria de $x(t)$ si nos damos cuenta de que se puede escribir la evolución como:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx}$$

con un "potencial:

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

Es fácil demostrar que V siempre decrece durante la evolución dinámica:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

de manera que la dinámica se puede interpretar como la trayectoria de una canica rodando en el perfil $V(x)$ con una alta fricción de manera que caiga hacia los mínimos de $V(x)$, como corresponde a la estabilidad de ambos estados $x = \pm 1$, ver figura 3.

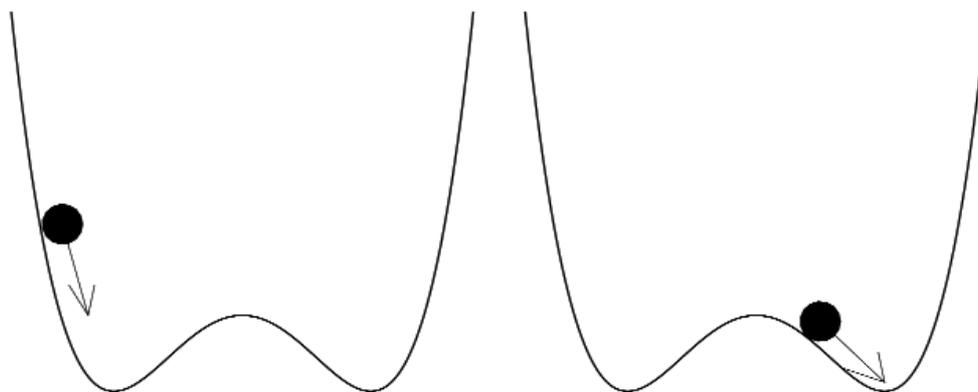


Figura 3: Visualización de la dinámica del sistema biestable como la relajación de una partícula en un

potencial $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$

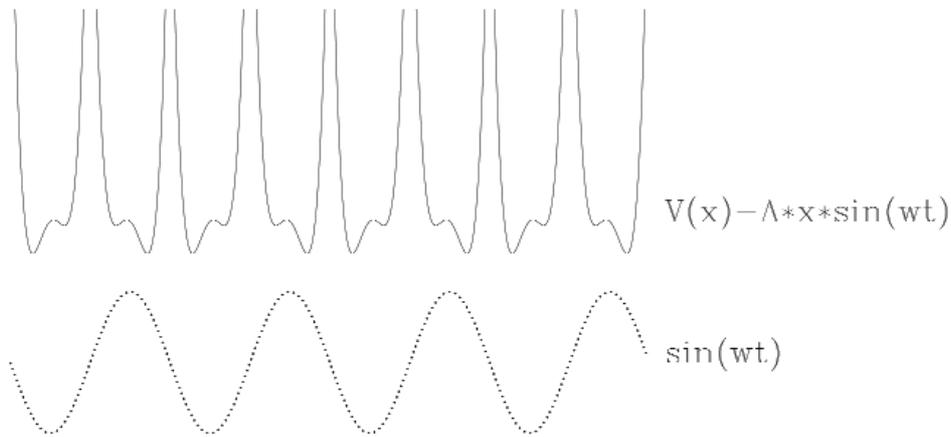


Figura 4: Mecanismo de la resonancia estocástica. Mostramos en esta figura la perturbación externa $\sin(\omega t)$

y su efecto en el potencial $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - Ax \sin(\omega t)$. Obsérvese que en los máximos de la

perturbación, el potencial es tal que favorece el salto hacia la derecha, mientras que en los mínimos de la perturbación es más fácil el salto inverso.

Si ahora aplicamos una perturbación periódica de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ en la forma:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + A \sin(\omega t)$$

el resultado es equivalente a una modificación periódica del potencial:

$$V(x, t) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - xA \sin(\omega t)$$

y el efecto es el de modificar periódicamente la altura relativa de los mínimos de $V(x)$, figura 4. Para aquellos tiempos t para los que $\sin(\omega t) > 0$ se tendrá que el mínimo en $x = +1$ se hace más profundo, mientras que para $\sin(\omega t) < 0$ es el mínimo en $x = -1$ el que se hace más profundo. Imaginemos que en un tiempo inicial, $t = 0$, la partícula está en $x = +1$ y que introducimos el forzamiento $A \sin(\omega t)$. Para el primer semiperiodo $t < T/2$ es $A \sin(\omega t) > 0$ y la partícula se reafirma alrededor del mínimo $x = +1$, cuando $T/2 < t < T$ ese mínimo se hace menos profundo y la partícula tiende hacia $x = -1$. Si la amplitud A no es suficientemente grande, el mínimo en $x = +1$ no puede abandonarse. Un razonamiento parecido aplica cuando la condición inicial es en $x = -1$. Por

tanto, para un forzamiento *débil* (concretamente para $A < 0.38$, aproximadamente) no es posible que el forzamiento externo nos obligue a cambiar de mínimo. Es la situación del clima global de la Tierra para el que el débil forzamiento externo no permite pasar de climas cálidos a glaciales o viceversa.

Imaginemos ahora que a la dinámica en cuestión se le añade un término de ruido:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + \zeta(t)$$

Si interpretamos $\zeta(t)$ como la fuerza de Langevin, la dinámica es tal que la trayectoria x va evolucionando mediante dos efectos: mientras que el potencial $V(x)$ todavía fuerza a buscar los mínimos de $V(x)$ en $x = \pm 1$, el término de ruido hace que la partícula se mueva aleatoriamente a derecha e izquierda. Eventualmente y debido a esta componente estocástica del potencial, será posible que una trayectoria que comience en $x = +1$ acabe en $x = -1$ y viceversa⁶. El tiempo medio necesario T_s para pasar de un mínimo a otro fue calculado por Kramers en el límite de ruido blanco y es

$$T_s \propto e^{\frac{\Delta V}{G}}$$

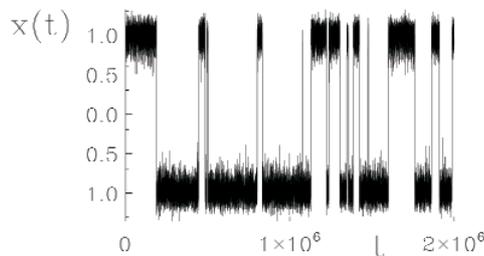


Figura 5: Trayectorias en el pozo biestable inducidas únicamente por ruido.

siendo ΔV la altura de la barrera de potencial necesaria para pasar de un mínimo a otro y G la intensidad del ruido. Como es de esperar, aunque para ruidos más intensos, el tiempo de salto entre estados es menor, cualquier intensidad de ruido hará que, eventualmente y si esperamos suficiente tiempo, tengamos la posibilidad de saltar de un mínimo a otro, véase la figura 5.

En el caso de la Tierra las componentes estocásticas en la dinámica tienen su origen en las fluctuaciones de la radiación recibida del Sol, debidas, entre otras causas, a las manchas y erupciones solares, la dinámica turbulenta de la atmósfera terrestre, etc. Si este fuera el mecanismo dominante para el paso de un clima glacial a uno cálido o viceversa, no cabría esperar ninguna periodicidad bien determinada en los saltos entre periodos cálidos y glaciares, contrariamente al periodo de 100,000 años observado. Imaginemos ahora que combinamos ambos efectos: un forzamiento débil y un término de ruido. Es decir, consideremos la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + A \sin(\omega t) + \zeta(t)$$

Imaginemos que empezamos en $x = +1$. Cuando la profundidad del pozo alrededor de $x = +1$ es máxima, para $\sin(\omega t) = +1$, $t = T/4$, es muy difícil que los términos estocásticos nos lleven de $x = +1$ a $x = -1$ porque hay que saltar una barrera alta de potencial. Cuando $\sin(\omega t) = -1$, para $t = 3T/4$, sin embargo, la barrera de potencial se ha reducido a su mínimo valor y es más fácil que los términos estocásticos de ruido nos hagan saltar a $x = -1$. Una vez estamos en el otro mínimo, $x = -1$, el razonamiento se aplica de manera parecida. Ahora será más fácil que los términos estocásticos nos hagan saltar a $x = +1$ cuando $\sin(\omega t) = +1$. Intuitivamente esperamos (y así confirman unos cálculos algo más complejos de lo que nuestro sencillo razonamiento hace entender) que cuando $T_s = T/2$ habrá un acoplamiento óptimo entre los saltos inducidos por ruido y la variación periódica del potencial. Puesto que T_s depende de la intensidad de ruido, existe un valor de G para el que se cumple la condición de resonancia y los saltos entre mínimos siguen óptimamente la fuerza externa, véase la figura 6. Esta es una resonancia inducida por ruido y se ha llamado *resonancia estocástica* a este mecanismo de amplificación de débiles señales externas inducidas por el ruido.

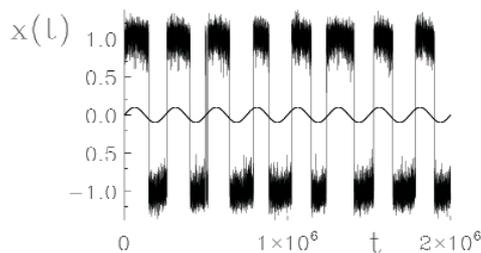


Figura 6: Trayectorias en el pozo biestable inducidas por ruido en presencia de una perturbación periódica.

Aunque no se ha demostrado completamente que la resonancia estocástica sea realmente la explicación de la alternancia entre periodos cálidos y glaciares en la Tierra, lo cierto es que el mecanismo es genérico y no requiere más que un sistema biestable en presencia de ruido y una perturbación externa. La primera demostración experimental fue debida a Fauve y Heslot⁷ quienes utilizaron un sencillo circuito electrónico biestable al que forzaron periódicamente y añadieron ruido, obteniendo efectivamente que había un valor del ruido óptimo para la amplificación de la señal periódica, tal y como se había predicho para el sencillo sistema biestable. A este resultado experimental le siguieron otros. En particular, McNamara, Wiesenfeld y Roy demostraron en 1988⁸ la existencia de resonancia estocástica en un láser en anillo. En este caso, la biestabilidad se refiere a la posibilidad de que la luz láser recorra el anillo en sentido horario o antihorario. Se encontró de manera inequívoca que los cambios de sentido se sincronizan mejor a un forzamiento periódico cuando se añade la cantidad correcta de ruido.

La idea que subyace a la resonancia estocástica es que **es posible tener un sistema que amplifique señales débiles con la ayuda de ruido**. Este comportamiento inusual del ruido llamó inmediatamente el interés de muchos investigadores y hoy en día se cuentan por cientos los artículos que se han publicado sobre este tema, bien de carácter teórico o experimental, extendiendo el fenómeno a otras situaciones (ruido de color, perturbaciones no periódicas, sistemas no biestables, sistemas caóticos, etc.)^{9,10}. Una aplicación particularmente interesante desde mi punto de vista es la que sugiere la posibilidad de tener resonancia estocástica en modelos de formación de opinión en sociedades^{11,12}. En este caso, el sistema biestable representa la opinión, favorable o desfavorable, que pueden tener los individuos de una sociedad sobre un determinado tema; la señal externa es la publicidad que se hace en favor de una u otra posición; y el ruido corresponde al libre albedrío, es decir aquellas personas que adoptan una posición u otra independientemente de lo que diga el resto de la sociedad o la propaganda.

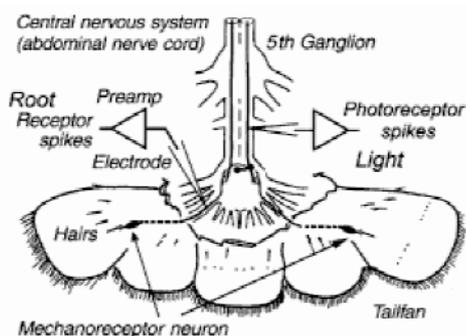


Figura 7: Esquema de la cola de langosta usada en los experimentos de resonancia estocástica. Reproducida de la referencia 14.

Quiero, en la parte final de este artículo, presentar algunos casos de interés en biología para los que se ha demostrado que existe resonancia estocástica. El primer ejemplo fue presentado por Frank Moss y colaboradores en 1994^{13,14}. Estos autores midieron el potencial de acción en una neurona de la cola de un tipo de langosta (*Procambarus clarkii*), figura 7. Esta neurona conecta directamente un pelo del sistema receptor al ganglio abdominal. La cola de la langosta (separada del cuerpo)

se puso en una solución salina en la que se provocaron ondas de baja amplitud y periodicidad de unas decenas de Herzios. Estas ondas eran tan débiles que no produjeron respuesta en el sistema mecanorreceptor de la langosta. Se añadió entonces ruido a las oscilaciones de la solución salina para observar cómo la señal oscilatoria era transportada a lo largo de la neurona de manera óptima para una intensidad de ruido correcta. Ésta fue la primera observación de resonancia estocástica en un sistema neuronal receptor del movimiento. Fue natural entonces especular si la evolución del sistema nervioso del animal había sido tal que permitiera optimizar este efecto. Si bien el trabajo determinó sin ningún tipo de dudas la existencia de resonancia estocástica en el sistema receptor de la langosta, lo cierto es que no se pudo determinar si el animal realmente utilizaba ese mecanismo como defensa frente a la acción de otros depredadores. La

idea es que el animal vive en un entorno ruidoso y puede así captar de manera óptima una oscilación del agua que correspondería, supuestamente, a un depredador que se acercara, de manera que podría tomar las acciones de defensa adecuadas.

Un trabajo posterior^{15,16} avanzó en esta dirección al estudiar la resonancia estocástica en el pez espátula, *Polyodon Spathula*. Este pez vive de un plancton llamado Daphnia cuya presencia reconoce mediante la detección de un débil campo eléctrico (del orden de V/mm) que genera Daphnia. Se puso al pez espátula en presencia de Daphnia entre dos electrodos que añadían al campo eléctrico del plancton una componente estocástica, demostrándose que el pez espátula era capaz de acertar más veces a comerse el plancton cuando el ruido tenía la intensidad adecuada. Se había demostrado que un animal vivo puede usar el mecanismo de resonancia estocástica para optimizar su ritmo de captura de presas, véase figura 8.

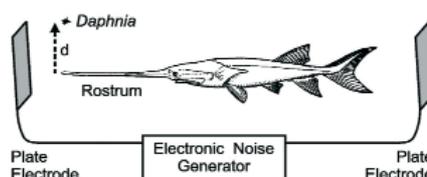


Figura 8: El pez espátula tiene centenares de células electrorreceptoras que detectan mejor el campo eléctrico generado por el plancton Daphnia si se aplica una cierta cantidad de ruido entre los electrodos. Reproducido de la referencia 16.

La idea tomó una dirección fascinante cuando un equipo dirigido por J. Collins empezó a hacer medidas de la capacidad de detección táctil en humanos¹⁷. Tomaron voluntarios determinando primero su umbral de detección, véase figura 9. Para ello aplicaban un pulso mediante una aguja a un dedo del sujeto de manera que dicho pulso estaba justo por debajo del nivel de sensibilidad y no era, por tanto, detectado por el sujeto. A continuación se añadió una componente aleatoria al pulso y se determinó en qué porcentaje de ocasiones se identificaba claramente la señal en la yema del dedo como un pulso producido por la aguja. Se llegó a la conclusión de que el porcentaje de pulsos acertados era otra vez óptimo cuando el ruido tenía la amplitud adecuada. Concluyen los autores que el ruido puede mejorar la detección de señales

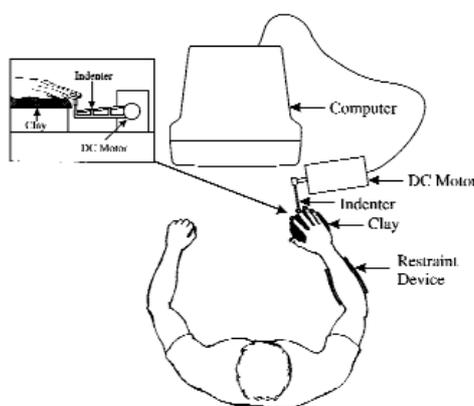


Figura 9: Esquema del experimento sobre la detección táctil de señales en presencia de ruido. Reproducido de la referencia 17.

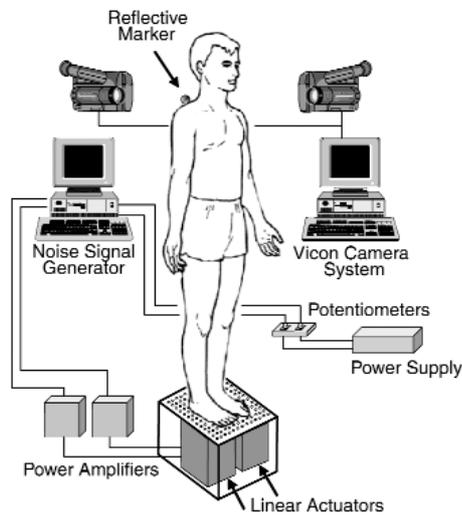


Figura 10: Esquema del experimento sobre la mejora del balance en presencia de ruido. Reproducido de la referencia 18.

en la espalda del sujeto. A continuación aplicaron a la persona “ruido en los pies”. Esto se consiguió aplicando presión mecánica en la forma de pequeños pinchazos con un gran número de agujas en la planta de los pies. Se vio que el sentido del balance era mayor cuando se le aplicaba la cantidad correcta de ruido en los pies.

Una serie de resultados avanzan en la dirección de que la resonancia estocástica está presente en muchos otros modelos de interés biológico. Sirvan como últimos ejemplos los trabajos sobre estabilización del sistema barorreflector, la resonancia estocástica que se produce en el cerebro al procesar impulsos visuales, una interesantísima interpretación del fenómeno de la *frecuencia fantasma* que se produce cuando el oído escucha una tercera frecuencia como combinación de dos de entrada (un fenómeno conocido por los fabricantes de órganos que para producir una nota muy baja que hubiera requerido un tubo excesivamente largo, combinaban dos notas de una tesitura más alta), la resonancia estocástica en la percepción visual (figura 11); etc.



Figura 11: Un ejemplo de resonancia estocástica en el sistema visual. La débil imagen (izquierda) se observa mejor cuando se añade una cierta cantidad de ruido (centro); un ruido adicional excesivo vuelve a empeorar la calidad de la percepción (derecha). Reproducido de la referencia 19.

débiles e incluso sugieren la construcción de unos guantes con ruido añadido para mejorar la percepción en aquellas personas que, por el motivo que sea, tienen disminuidas sus capacidades sensoriales de detección.

Un grupo de investigación, también dirigido por J. Collins, estudió el efecto del ruido en el balance del equilibrio¹⁸. Tomaron voluntarios a quienes dijeron que cerraran los ojos y trataran de mantener el equilibrio estando de pie, véase figura 10. Si el lector lo intenta, verá que es inevitable un ligero balanceo que estos autores registraron mediante la reflexión de la luz de un puntero láser en un pequeño espejo

de la percepción visual (figura 11); etc.

El camino iniciado por Einstein hace ahora 100 años sigue abierto. La inclusión de elementos probabilísticos en la descripción de la evolución de un sistema ha demostrado ser un método prolífico que nos ha aportado más avances que el punto de vista determinista extremo de Laplace. Creo haber dado suficiente evidencia de que, lejos de ser indeseado, el ruido puede ayudarnos en la mejora de la percepción sensorial y puede ser determinante en la misma existencia de la vida. Así aunque “no haya ruido bueno” podemos concluir que “algunos ruidos son mejores que otros”.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco la invitación del profesor Pedro González para impartir la conferencia en la que se basa este artículo, así como el amable trato dispensado durante mi estancia en Valencia. Mi investigación en estos temas es financiada por el Gobierno español y los fondos Feder de la Unión Europea a través de los proyectos FIS2004-5073-C04-03 y FIS2004-953.

REFERENCIAS

- ¹ A. Einstein, *Sobre el movimiento requerido por la teoría cinético molecular del calor, de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario*, Ann. Der Phys 17, 549 (1905).
- ² El nombre de “ruido blanco” hace referencia a la ausencia de una escala temporal característica en la fuerza estocástica, de la misma manera que la luz blanca no tiene ninguna frecuencia característica, porque las tiene todas. Como contraposición, cuando la aproximación $\tau_0 \rightarrow 0$, no es válida y es comparable a los tiempos de observación, se habla de un ruido de “color”.
- ³ R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, *The mechanism of stochastic resonance*, J. Phys. A14, L453(1981); R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani, *Stochastic resonance in climatic change*, Tellus 34, 10 (1982).
- ⁴ C. Nicolis, *Stochastic aspects of climatic transitions - Response to a periodic forcing*, Tellus 34, 1 (1982).
- ⁵ Recuérdese la tradición de la física de simplificar problemas con la famosa “vaca esférica y sin masa”.
- ⁶ Este movimiento aleatorio a derecha e izquierda se conoce en la literatura científica como “el perfecto borracho”. Si le damos suficiente tiempo, el “perfecto borracho” será capaz de encontrar, por puro azar, el camino que lleva del bar a su casa.
- ⁷ S. Fauve, F. Heslot, *Stochastic resonance in a bistable system*, Phys. Lett. A97, 5 (1983)
- ⁸ B. McNamara, W. Wiesenfeld, R. Roy, *Observation of Stochastic Resonance in a Ring Laser*, Phys. Rev. Lett. 60, 2626 (1988).
- ⁹ Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop: *Stochastic Resonance in Physics and Biology*. F. Moss, A. Bulsara, M.F. Shlesinger, eds. J. Stat. Phys. 70 (1993).
- ¹⁰ L. Cammaritoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, *Stochastic resonance*, Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998).
- ¹¹ M. Kuperman, D. Zanette, *Stochastic resonance in a model of opinion formation on small-world networks*, Eur. Phys. J.B 26, 387 (2002).

RAÚL TORAL

- ¹² C. Tessone, R. Toral, *System size stochastic resonance in a model for opinion formation*, Physica A351, 106 (2005).
- ¹³ J.K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazalou, F. Moss, *Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance*, Nature 365, 337 (1993); K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazalou, C. Dames and F. Moss, *Stochastic resonance on a circle*, Phys. Rev. Lett. 72, 2125 (1994).
- ¹⁴ S. Bahar, F. Moss, *The Nonlinear Dynamics of the Crayfish Mechanoreceptor System*, Int. J. Bif. Chaos 13, 2013 (2003).
- ¹⁵ P.E. Greenwood, L. M. Ward, D.F. Russell, A. Neiman, F. Moss, *Stochastic Resonance Enhances the Electrosensory Information Available to Paddlefish for Prey Capture*, Phys. Rev. Lett. 84, 4773 (2000).
- ¹⁶ D. F. Russell, L. Wilkens, F. Moss, *Use of behavioural stochastic resonance by paddle fish for feeding*, Nature 402, 291 (1999).
- ¹⁷ J. Collins, T. Imhroff, P. Grieg, *Noise-enhanced tactile sensation*, Nature 383, 770 (1996); *Noise mediated enhancements and decrements in human tactile sensation*, Phys. Rev. E 56, 923 (1997).
- ¹⁸ A. Priplata, J. Niemi, M. Salen, J. Harry, L. Liptiz, J. Collins, *Noise-enhanced human balance control*, Phys. Rev. Lett. 89, 238101 (2002).
- ¹⁹ E. Simanotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, F. Moss, Phys. Rev. Lett. 78, 1186 (1997).

