

Iacyel G. da Silva,

# Aspectos de sincronización en un sistema caótico

Física – Tesis

Universitat de Les Illes Balears

Directores

Claudio Rubén Mirasso Santos y

Raúl Toral Garcés

---

Los directores de la presente tesis, Dr. Claudio Rubén Mirasso Santos y Dr. Raúl Toral Garcés, titulares de la Universitat de les Illes Balears certifican que esta tesis doctoral ha sido realizada por el Sr. Iacyel Gomes da Silva para la obtención del grado de Doctor en Física. Por ello firman este documento.

En Palma de Mallorca a 6 de noviembre de 2006.

Claudio Rubén Mirasso Santos

Raúl Toral Garcés

---

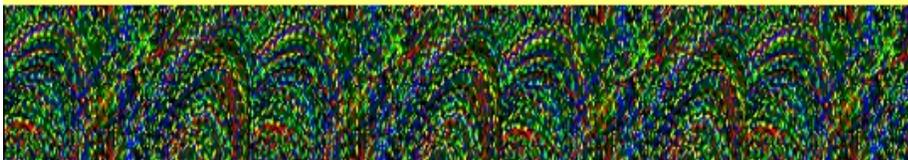
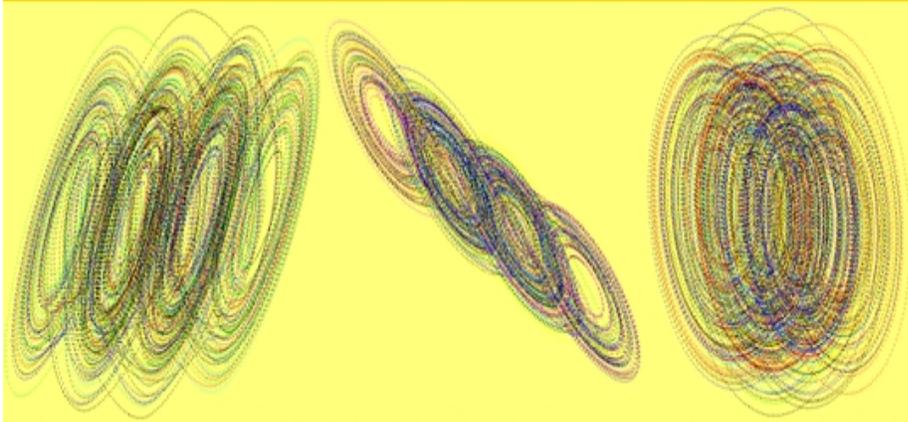
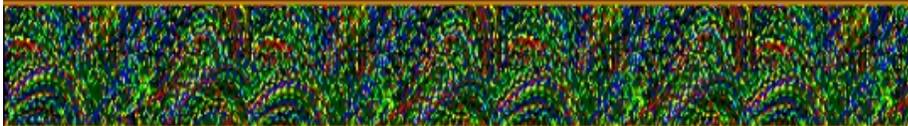
Se fosse fácil não teria graça

**A Jaziel e Iacy por tudo.**

**Autor**  
**Iacyel Gomes da Silva**

# **Aspectos de sincronización en un sistema caótico**

**Física – Tesis doctoral**  
**Universitat de les Illes Balears**



**Directores**  
**Claudio Rubén Mirasso Santos y**  
**Raúl Toral Garcés**

**Fig. 0.1.** Portada: Simulación numérica con cuatro circuitos de Chua acoplados en una configuración en cadena lineal



# Índice

---

## Parte I. Sistemas dinámicos: sincronización de un sistema caótico con señales externas

---

<b>1. Introducción</b> .....	25
<b>2. Circuito electrónico de Chua</b> .....	29
2.1 Introducción .....	29
2.2 Resistencia variable del circuito de Chua .....	34
2.3 Frecuencia y amplitud .....	37
2.3.1 La acción conjunta entre $R$ y $F(t)$ .....	40
2.4 Ruido .....	40
2.5 Resumen .....	41
<b>3. Observación experimental de fenómenos estocásticos en un sistema caótico</b> .....	43
3.1 Introducción .....	43
3.2 Resonancia estocástica en un sistema caótico .....	45
3.2.1 Amplificación de señales deterministas .....	50
3.2.2 Resonancia estocástica bajo efectos de la intensidad de amplitud ( $E_0$ ) .....	51
3.2.3 Resonancia estocástica bajo efectos de pequeñas variaciones de la resistencia variable .....	55
3.2.4 Análisis en el tiempo .....	57
3.2.5 Resumen .....	64
3.3 Una posible aplicación: “resonancia fantasma” .....	65
3.3.1 Interacción sin ruido .....	68
3.3.2 Interacción con ruido .....	73
3.3.3 Resumen .....	75
3.4 Resonancia de coherencia .....	76
3.4.1 Resumen .....	79
<b>4. Conclusión</b> .....	81

<b>Bibliografía</b> .....	83
---------------------------	----

---

## Parte II. Sincronización entre sistemas caóticos

---

<b>5. Introducción</b> .....	89
<b>6. Régimen coherente de circuitos acoplados mutuamente</b> .....	93
6.1 Introducción .....	93
6.2 Acoplamiento global .....	95
6.3 Poblaciones con “desintonía en los parámetro” .....	97
6.4 El desarrollo del parámetro de orden para circuitos de Chua acoplados .....	99
6.5 Acoplamiento mutuo fuerte .....	103
6.6 Muerte de la oscilación en un circuito con desintonía en el tiempo característico .....	106
6.7 Resumen .....	107
<b>7. Análisis experimental de la sincronización entre tres circuitos Chua</b> .....	111
7.1 Introducción .....	111
7.2 Configuración experimental .....	113
7.3 La influencia de la intensidad de acoplamiento .....	114
7.4 Resumen .....	121
<b>8. Conclusión</b> .....	123
<b>9. Consideraciones finales</b> .....	125
<b>Bibliografía</b> .....	126
<b>10. Apéndice A</b> .....	129
10.1 Características generales de sistemas dinámicos .....	129
<b>11. Apéndice B</b> .....	133
11.1 Descripción matemática del sistema de Chua .....	133
<b>12. Apéndice C</b> .....	137
12.1 Sincronización de caos en un circuito de Chua .....	137
12.1.1 Sistema acoplado en la variable X .....	140
12.2 Sincronización a través del control continuo de la respuesta de un sistema. ....	142
12.2.1 Acoplamiento en la variable X .....	143

# Lista de Figuras

0.1	Portada: Simulación numérica con cuatro circuito de Chua acoplados en una configuración en cadena linear . . . . .	5
2.1	Diagrama esquemático . . . . .	31
2.2	a) Atractor típico del circuito de Chua en ausencia de forzamiento externo b) Salida $V_1$ como función del tiempo. . . . .	32
2.3	Transformada de Fourier de $V_1$ . El pico más pronunciado está cerca de $f_{ch} = 2.7kHz$ . . . . .	32
2.4	El atractor espiral doble que presenta el circuito de Chua (izquierda). La salida $V_1$ como función del tiempo (derecha). . . . .	33
2.5	Típica secuencia de bifurcación: a) periodo 1 ( $R = 1.76k\Omega$ ). b) periodo 2 ( $R = 1.71k\Omega$ ). c) periodo 4 ( $R = 1.70k\Omega$ ). d) espiral simple ( $R = 1.65k\Omega$ ). e) espiral doble ( $R = 1.64k\Omega$ ). . . . .	35
2.6	Atractor imagen de espejo. . . . .	36
2.7	Atractor espiral simple sin influencia de forzamiento externo para diferentes valores de la resistencia variable $R = 1.682k\Omega, 1.668k\Omega, 1650k\Omega$ . . . . .	36
2.8	Espacio de fase $V_1$ y $V_2$ bajo influencia de la señal externa. El valor de resistencia fue fijado en $R = 1.682K\Omega$ . . . . .	38
2.9	La máxima amplitud en función de la frecuencia que no permite saltos entre los atractores dinámicos. La resistencia constante utilizada fue de $R = 1.682k\Omega$ El eje de las abscisas está normalizada por el valor medio de oscilación del sistema $f_{ch} = 2.7kHz$ . . . . .	39
3.1	diagrama de bifurcaciones globales en el plano $\alpha, \beta$ . . . . .	44
3.2	Relación intuitiva entre los modelos browniano y caótico. . . . .	46
3.3	Relación señal ruido (SNR ). Representación de una curva típica de resonancia estocástica. . . . .	47
3.4	Transformada de Fourier generalizada. . . . .	48
3.5	Serie de tiempos. . . . .	49

3.6 Espectro de potencia para cuatro series de la señal de salida del sistema bajo los valores constantes de frecuencia  $f = 1.8kHz$ , amplitud  $E_0^{\max} = 5mV[rms]$ , resistencia variable del circuito de Chua  $R = 1.682k\Omega$ . En la columna 2 está el armónico fundamental y en la columna 3 su respectivo armónico  $f_a = 5.4kHz$ . . . . . 51

3.7 Relación señal ruido (SNR) para la frecuencia externa de  $1.8kHz$  y su armónico  $f_a = 5.4kHz$ , la amplitud externa constante es  $E_0^{\max} = 5mV[rms]$  y la resistencia variable del circuito de Chua es  $R = 1.682k\Omega$ . . . . . 52

3.8 Relación señal ruido(SNR) en función del ruido para diferentes niveles de frecuencia y amplitud: (a)  $f = 0.9kHz, E_0^{\max} = 7mVrms$ ; (b)  $f = 1.8kHz, E_0^{\max} = 5mVrms$ ; (c)  $f = 2.7kHz, E_0^{\max} = 6.4mVrms$ ; (d)  $f = 4.5kHz, E_0^{\max} = 25mVrms$ . En los paneles (a) y (b) se observa resonancia estocástica en el pico fundamental y en sus respectivos armónicos que es representada por la curva que presenta valores de SNR más pequeños. Fue utilizado  $R = 1.682k$  . . . 53

3.9 Factor de amplificación  $\eta$  en función de la intensidad de ruido normalizado para diferentes niveles de amplitud  $E_0$ , bajo frecuencia constante  $f_0 = 1.8kHz$  y resistencia  $R = 1.682k\Omega$ . . . . . 54

3.10 Factor de amplificación  $\eta$  en función de la intensidad de ruido normalizado para diferentes valores de frecuencia  $f_0$  escritos en la figura. La curva sólida es el resultado del ajuste a partir de la eq.3.2, resistencia  $R = 1.682k\Omega$ . . . . . 55

3.11 Relación señal ruido en función del ruido, para frecuencia externa  $f_0 = 30Hz$  y amplitud  $E_0 = 35.36mV[rms]$ . Cada serie presenta un máximo de ruido  $N$ , relacionado con los valores de la resistencia variable  $R$ . . . . . 56

3.12 Distribución de probabilidad  $P(t_r/t_0)$  del tiempo de residencia  $t_r$  para  $f_0 = 270Hz$  y  $N = 0.3125V[rms]$ .  $T_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025. . . . . 57

3.13 Distribución de probabilidad  $P(t_p/t_0)$  del tiempo de pulso  $t_p$  para  $f_0 = 270Hz$ ,  $N = 62.5mV [rms]$  (panel superior).  $t_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025. . . . . 58

3.14 Distribución de probabilidad  $P(t_p/t_0)$  del tiempo de pulso  $t_p$  para  $f_0 = 270Hz$  y  $N = 312.5mV[rms]$ .  $t_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025. . . . . 59

3.15 Distribución de probabilidad  $P(t_p/t_0)$  del tiempo de pulso  $t_p$  para  $f_0 = 270Hz$  y  $N = 750.mV[rms]$ .  $t_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025. . . . . 59

3.16 Distribución de probabilidad  $P(T_p/T_0)$  del tiempo de pulso  $T_p$  para  $f_0 = 2.728kHz$  y  $N = 312.5mV[rms]$ .  $T_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025..... 60

3.17 Distribución de probabilidad  $P(T_r/T_p)$  del tiempo de pulso  $T_p$  para  $f_0 = 4.0kHz$  y  $N = 312.5mV[rms]$ .  $T_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025..... 61

3.18 El tiempo medio de pulso versus la intensidad de ruido normalizados bajo señal periodica  $f_0 = 270Hz$  y  $4.0kHz$ . En la figura  $T_{ch} = 1/f_{ch}$ . El resultado representado por curva sólida ha sido ajustado a través de la *eq.3.7*..... 61

3.19 Distribución de probabilidad del tiempo medio de pulso  $P(t_p/ < t_p >)$ ,  $f_0 = 270Hz$ . Las intensidades de ruido óptimas son dadas en la figura. La curva sólida ha sido ajustada a través de la *eq.3.8*..... 62

3.20 Distribución de probabilidad del tiempo medio de pulso  $P(t_p/ < t_p >)$ ,  $f_0 = 4.0kHz$ . Las intensidades de ruido óptimas son dadas en la figura. La curva sólida ha sido ajustada a través de la *eq.3.8*..... 63

3.21 Dependencia de la proporción  $t_N^{max}/t_N$  para tiempo de residencia ( $t_r$ ) y de pulso ( $t_p$ ) versus la intensidad de ruido normalizado bajo señal periódica de entrada con frecuencia  $270Hz$  y  $4.0kHz$ .  $t_{ch} = 1/f_{ch}$  e intensidad de ruido óptima. El resultado representado por la curva sólida ha sido ajustado a través de la ecuación 4 dada en el texto. . . 64

3.22 En el experimento de Shouten tres individuos escuchaban un sonido compuesto por tres tonos puros de frecuencias. Las campanas grises indican la probabilidad con que la neurona de Chiavo se excita. . . . 67

3.23 Series de la señal de salida  $V_1$  del circuito de Chua, bajo el nivel de amplitud  $E = 75mV$ , de la señal  $E(t)$  (primer panel) y sus respectivas transformadas de Fourier e histograma de frecuencia . . . 69

3.24 Series de la señal de salida  $V_1$  del circuito de Chua, bajo el nivel de amplitud  $E = 250mV$ , de la señal  $E(t)$  (primer panel) y sus respectivas transformadas de Fourier e histograma de frecuencia . . . 69

3.25 Series de la señal de salida  $V_1$  del circuito de Chua, bajo el nivel de amplitud  $E = 500mV$ , de la señal  $E(t)$  (primer panel) y sus respectivas transformadas de Fourier e histograma de frecuencia . . . 70

3.26 Histogramas de frecuencias..... 71

3.27 Histograma obtenido a través de las series de las señales de salidas del circuito de Chua que muestran los puntos de frecuencia fantasma  $f_r = 500Hz, 600Hz, 700Hz, 800Hz$  ..... 72

3.28 Intensidad de amplitud externa  $E_0$  versus desplazamiento de frecuencias de la señal externa  $\Delta f$ . Se observa en la salida del sistema  $V_2$  que por debajo del umbral oscila solamente el atractor espiral simple. . . . . 74

3.29 Resultado experimental. Respuesta que muestra la frecuencia fantasma. En el eje de las abcisas se presenta la frecuencia  $f_1$ , y en el eje de las ordenadas la  $f_r$ . Las líneas señalan la probabilidad de observar la frecuencia fantasma para  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ . . . . . 75

3.30 Resultado numérico. Respuesta que muestra la frecuencia fantasma . En el eje de las abcisas se presenta la frecuencia  $f_1$ , y en el eje de las ordenadas la  $f_r$ . Las líneas señalan la probabilidad de observar la frecuencia fantasma para  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ . . . . . 76

3.31 (a) Series de tiempos ( $V_1$ ) para diferentes niveles de ruido  $0.5V[rms]$ ,  $1.5V[rms]$  (óptimo) y  $2.5V[rms]$  (b) Función de autocorrelación bajo los mismos niveles de ruido. . . . . 78

3.32 (a) variancia del tiempo de residencia  $T_r$  (b) Función de correlación mínima  $C_{min}$  en función del ruido. . . . . 78

3.33 SNR en función del ruido, bajo señal sinusoidal externa  $E = E_0 \sin(2\pi f_0 t)$  con  $f_0 = 2.1kHz$  y  $E_0 = 20mV$ , en este caso  $fch = 2.3kHz$ . . . . . 79

6.1 Diagrama esquemático de la configuración experimental . . . . . 101

6.2 En a) y b) los circuitos están no acoplados ( $R_1 = 1.740k\Omega$ ,  $R_2 = 1.664k\Omega$ ). En c) se muestran las salidas dinámicas ( $V_1$ ,  $V_2$ ) del primer circuito después de acoplado. En d) el primer circuito (no acoplado) está sintonizado al término medio  $(R_1 + R_2)/2$ . . . . . 104

6.3 En a) y b) los circuitos no están acoplados ( $R_1 = 1.621k\Omega$ ,  $R_2 = 1.745k\Omega$ ). En c) se muestran las salidas dinámicas ( $V_1$ ,  $V_2$ ) del primer circuito después de acoplado. En d) el primer circuito, no acoplado, está sintonizado al término medio  $(R_1 + R_2)/2$ . . . . . 105

6.4 Diagrama de bifurcación indicando el comportamiento de  $V_1$ ,  $V_2$  para diferentes acoplamientos  $R$ . Los circuitos poseen diferentes escalas de tiempo . . . . . 108

6.5 Comportamiento de  $V_1$ ,  $V_2$  para  $Rc = 0\Omega, 0.5k\Omega, 0.9k\Omega, 1.3k\Omega$ . Los circuitos poseen diferentes escalas de tiempo. . . . . 108

7.1 Representación esquemática de la disposición experimental. . . . . 113

7.2 Diagrama esquemático de la disposición experimental. . . . . 114

7.3 En (a) y (b) se muestra la evolución temporal de  $V_1$  y  $V_2$  de los circuitos: cir.  $A$  (negro), cir.  $B$  (rojo) y cir.  $C$  (azul), para  $R_c = 0$ , y en (c) la dinámica del circuito  $A$  en el espacio de la fase  $V_1, V_2$  (para  $A$  y  $C$  es similar). . . . . 115

7.4 Espacio de fase  $V_1, V_2$  de los circuitos  $A, B$  y  $C$  para  $R_c = 20K\Omega$  (baja itens. de acoplamiento). . . . . 116

7.5 Comparación en tiempo entre  $V_1, V_2$  de los circuitos  $A, B$  y  $C$  para  $R_c = 20K\Omega$ . En a) y b)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro),  $V_2$  del cir.  $C$  (en rojo). En c) y d)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro),  $V_2$  del cir.  $B$  (en rojo). . . . . 116

7.6 Espacio de fases  $V_1, V_2$  de los circuitos  $A, B$  y  $C$  para  $R = 20K\Omega$ , pero aquí se ha cambiado la condición inicial. . . . . 117

7.7 Comparación entre  $V_1, V_2$  ( en el tiempo) de los circuitos  $A, B$  y  $C$ . En (a) y (b)  $V_1$  del circuito  $A$  (en negro) y  $V_2$  del circuito  $C$  (en rojo). En (c) y (d)  $V_1$  del circuito  $A$  (en negro) y  $V_2$  del circuito externo  $B$  (rojo). . . . . 118

7.8 Espacio de fases  $V_1, V_2$  de los cir.  $A, B$  y  $C$  para  $R_c = 10k\Omega$ , (acoplamiento intens. media). . . . . 119

7.9 Comparación entre  $V_1, V_2$  (en el tiempo) de los cir.  $A, B$  y  $C$ , para  $R_c = 10k$ . En a) y b)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir.  $C$  (en rojo). En c) y d)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir. externo  $B$  (rojo). . . . . 119

7.10 Espacio de fases  $V_1, V_2$  de los cir.  $A, B$  y  $C$  para  $R_c = 2k\Omega$ , (intens. alta de acoplamiento). . . . . 120

7.11 Comparación entre  $V_1, V_2$  (en el tiempo) de los cir.  $A, B$  y  $C$  para  $R_c = 10k\Omega$ . En a) y b)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir.  $C$  (en rojo). En c) y d)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir. externo  $B$  (rojo). . . . . 121

10.1 Representación de la divergencia de dos trayectorias. . . . . 131

10.2 Atractor de Lorenz. . . . . 132

11.1 Diagrama simplificado del circuito de Chua. . . . . 133

11.2 Curva característica del diodo de Chua. . . . . 134

12.1 Diagrama esquemático de la configuración experimental. . . . . 141

12.2 Diagrama esquemático de la configuración experimental. . . . . 143

12.3 Diagrama esquemático de la configuración experimental. . . . . 145

12.4 Atractor espiral doble (izquierda) y línea de sincronización (derecha). 145

## Prefacio

La mayoría de los sistemas utilizados en ingeniería están basados en dispositivos que operan en régimen lineal. Sin embargo, en los últimos 20 años ha habido un gran interés en el estudio de sistemas no lineales. Estos sistemas pueden presentar inestabilidades que en ocasiones lo conducen a un comportamiento aperiódico conocido con el nombre de "caos determinista". La palabra "caos" se la asocia frecuentemente con una forma de ruido (un comportamiento a evitar), aunque la señal caótica presente también un espectro de Fourier ancho. Así, una señal caótica es una forma intermedia entre una señal periódica y una señal estocástica (ruido), y éste carácter es el que confiere a estas señales cierta utilidad como, por ejemplo, en comunicaciones seguras.

En un primer momento, la mayor parte de los estudios realizados sobre sistemas caóticos tenían como objetivo la identificación de las inestabilidades, con el fin de evitar el régimen de operación indeseables del sistema. Sin embargo, el año 1990 y con la introducción de los conceptos de control de caos y sincronización caótica, cambió totalmente esta perspectiva. La demostración de que los sistemas caóticos pueden controlarse para obtener comportamientos prefijados a costa de débiles señales de control, ha abierto todo un campo de posibilidades.

Hoy en día son ya numerosas las aplicaciones de estas ideas; la utilización de circuitos electrónicos para simular comportamientos de procesos físicos, químicos, biológicos, etc. ha tomado un gran auge. La formación de estructuras espacio-temporales, la conducción de impulsos cardíacos, estudios de resonancia estocástica o coherente y la sincronización de circuitos caóticos con aplicaciones a las comunicaciones o procesos de reacción-difusión son algunos de los ejemplos en los que los circuitos electrónicos han sido utilizados con éxito para estudiar, comprender y explicar procesos descritos por complejas ecuaciones no-lineales.

Los circuitos se presentan como una herramienta de una gran utilidad para estudiar una gran variedad de procesos, actuando como complemento entre el experimento en sí y la simulación numérica por ordenador. Entre las ventajas que ofrece la simulación con circuitos se encuentran tanto el alto grado de desarrollo de componentes electrónicos como el bajo coste (en general) de los

dispositivos. Y son varios los ejemplos de circuitos electrónicos utilizados para el estudio de Caos; el sistema de Lorenz, Van de Pol, Fitz Hugh-Nagumo o de Chua son algunos de ellos.

En particular, este trabajo utiliza el circuito electrónico de Chua operando en un régimen caótico como dispositivo experimental que permite verificar fenómenos físicos y pueden ser clasificados en base a dos aspectos. El primero es la sincronización del sistema con señales externas. Esto lleva a la observación de fenómenos en los que el elemento estocástico, el ruido, juega un papel fundamental entre ellos: la resonancia estocástica [a], [b], [c], la resonancia de coherencia [b] y la resonancia fantasma (Ghost stochastic resonance). El segundo es la sincronización entre los propios circuitos de Chua; por un lado, se estudia la sincronización entre tres circuitos de Chua acoplados en una configuración de cadena lineal [d] en este caso se observan varios efectos dinámicos de interés. Por otro, utilizando dos circuitos de Chua mutuamente acoplados, se verifica a través de una técnica conocida como “the order parameter expansion”: un comportamiento que puede ser extendido a análisis de grandes poblaciones [e].

Los trabajos relacionados aquí han sido hechos en el departamento de Física de la Universitat de Les Illes Balears con el apoyo financiero de la Conselleria d’Economia, Hisenda i Innovació del Govern Balear. Han colaborado directa o indirectamente muchas personas ¡Tengo relacionados 1.535 nombres! pero creo que son demasiados para transcribirlos. Así que empezaré por brindar mi agradecimiento a mis directores de tesis Dr. Claudio Mirasso y Dr. Raúl Toral por la oportunidad de acceder al grupo de Física de esta universidad y hacer posible este trabajo; de la misma forma, agradecer a W. Korneta, Francesco D’ Ovidio, Silvia de Monte, Javier Martín Buldu, Jordi García-Ojalvo y Oscar Calvo, la paciencia que me dedicaron en los trabajos que realizamos juntos. También a mis compañeros de la universidad, profesores o investigadores: Emilio Hernández, Damià Gomila, Victor M. Eguiluz, Roberta Zambrini, Salvador Balle, Maxi San Miguel, Manuel Matías, Pere Colet y en especial a Alessandro Scirè con el que comparto muchas cosas en común, especialmente la música.

A los estudiantes de doctorado de la UIB: Raúl Vicente, Juan J. Cerdá, entre otros; con un guiño especial quiero agradecer a los ex estudiantes y compañeros de piso, ahora Doctores: Yanne Chembo, Marzena Ciszak y Francesco Marino, por la compañía y las innumerables charlas acerca de varios problemas comunes. Los mismo a los compañeros de laboratorio Pascual López y Antonio Pujol.

También es importante para mí mencionar a todos aquellos estudiantes que han compartido gastos y trabajos en el piso donde vivíamos y que no eran físicos; tengo buenos recuerdos de Numinato, David, Vibka, Silvio, Sonia y Pedro; seguramente hemos aprendido bastante los unos de los otros. Tampoco

olvido a mis amigos más antiguos aquí en Europa, los portugueses Cristina Copaan, Joao Barcelo, Maria Joao (a Joao), Maria Guedes (a Zeza), Renata Freitas (Renatinha). En mi estimado Brasil: al brasilerísimo Israel, Denilson, Ely, Rita, Yamiles, Jose Roberto, y a los profesores de la Universidade do Amazonas Dr. Ivan Tribuzzy , M. Raffaele Novellino, Dr. Ricardo R Sousa y el incomparable Dr. Wilson (todavía tengo guardado aquel dólar).

Terminada la parte de los docentes, ahora llegan los agradecimientos para mis amigos con los que he disfrutado de ópera, de excursiones, y de cientos de discusiones acerca de los más variados temas, sin contar con las comidas increíblemente buenas que hemos compartido; maravillosas situaciones que han llenado muchos de mis días: de Sri Lanka, Sanji; de Cuba, Juvenal, de República Dominicana, Marty; los mallorquines Josep Francesc, Pere, Xisca, Javier, Ana, Tano. Por último, pero no por ello menos importante, mi familia, está de más decir la importancia que han tenido y tienen en mi vida: mis padres Jaziel e Iacy, mis hermanos Eurenice, Eurisom y Euris y mi tío Eude. Y a Isabel por todos los momentos que me ha soportado y por su ayuda en la finalización de este trabajo.

Muchas gracias a todos.

#### Bibliografía

- [a] W. Korneta, I. Gomes, C. R. Mirasso, R. Toral, Experimental study of stochastic resonance in a Chua's circuit operating in a chaotic regime, *Physica D* **219**, 93 (2006).
- [b] I. Gomes, C. Mirasso, R. Toral and O. Calvo , Experimental Study of High Frequency Stochastic Resonance in Chua Circuits *Physica A* **327** , 115 (2003).
- [c] O. Calvo, I. Gomes, C. Mirasso and R. Toral, Experimental observation of coherence and stochastic resonances en an electronic Chua circuit, AIP Conference Proceedings of the 6th ECC, Potsdam, Germany, **622**, 427 (2002).
- [d] I. Gomes, J. M. Buldú; C. R. Mirasso; J. García-Ojalvo, Synchronization by dynamical relaying in electronic circuit arrays , *Chaos* **16**, 043113 (2006).
- [e] I. Gomes, S. De Monte, F. d'Ovidio, R. Toral, C.R. Mirasso, Coherent regimes of mutually coupled Chua's circuits, *Physical Review E* **73**, 1-7 (2006).



## Preface

Most of the systems used in engineering, is based on systems that operate in linear regime. Nevertheless, in the last 20 years there has been a great interest in the study of systems nonlinear. These systems can present instabilities that sometimes lead to the system to an aperiodic behavior known with the name “determinist chaos”. The word “chaos” is not used here with the usual meaning, that is to say, a noise form (a behavior to avoid), although the chaotic signal also presents a wide Fourier espectrum. Thus, a chaotic signal is an intermediate form between a periodic signal and a stochastic signal (noise), and this character is the one that confers to these signals its utility, for example in safe communications

At a first moment, most of the studies made on chaotic systems had like objective the identification of the instabilities, with the purpose of avoiding the chaotic regime of operation of the system. In 1990, with the introduction of the concepts of control of chaos and chaotic synchronization, it changed totally this perspective. The demonstration of which the chaotic systems can be controlled to obtain behaviors paid attention at the cost of weak signals of control, has opened to everything a field of possibilities.

Nowadays the applications of these ideas are already numerous; the use of electronic circuits to simulate behaviors of physical, chemical, biological processes, etc. has taken a great height. The formation of space-temporary structures, the conduction of cardiac impulses, studies of stochastic or coherent resonance and the synchronization of chaotic circuits with applications to the optical communications or processes of reaction-diffusion are some of the examples in which the electronic circuits have been used successfully to study, to understand and to explain processes described by complex not-linear equations.

The circuits appear like a tool of a great utility to study a great variety of processes, acting as complement between the experiment in himself and the numerical simulation by computer. Between the advantages that offer the simulation with circuits is so much the high degree of development of electronic components like the low cost (in general) of the devices. And there are several

examples of used electronic circuits for the study of Chaos such as Lorenz's system, Van de Pol, Fitz Hugh-Nagumo and Chua.

In individual, this work uses the electronic circuit of Chua operating in a chaotic regime like experimental apparatus to the verification of physical phenomena, that due to the form of experimental verification, can be classified on the basis of two aspects: First it is the synchronization of the system with external signals that it takes to the observation of phenomena in which the stochastic element, the noise, plays a main role: of estocástica resonance [a], [b], [c], of resonance of coherence [b] and the missing fundamental (Ghost stochastic resonance). The second is the synchronization between the own circuits of Chua; on the one hand, the synchronization between three circuits of Chua mutually connected in a configuration of linear chain studies [d] where several dynamic effects of interest can be observed, and on the other hand, using two circuits of Chua connected globally, it is verified through a well-known technique like "the to order to parameter spantion": the behavior that can be extended to analysis of great populations [e].

The works related here have been done in the dependencies of the laboratory of Physics of the University from Illes Balears (Spain) with the financial support of the "Conselleria de Educació del Govern Balear". Many people has collaborated in this work, I have related 1,535 names! but I suppose that they are too many to transcribe them. So I will begin to offer to my gratefulness to the director of my thesis Dr Claudio Mirasso as well as to the Dr. Raul Toral by the opportunity to gain access to the group of Physics of this university and to make possible this work; of the same form, to be thankful to W. Korneta, Francesco D' Ovidio, Silvia de Monte, Jordi García-Ojalvo, Javier Martin Buldu and O. Calvo the patience that dedicated to me in the works that we made together. Also to my companions of the university, professors or investigators: Emilio Hernández, Damià Gomila, Victor M. Eguiluz, Roberta Zambrini, Salvador Balle, Maxi San Miguel, Manuel Matías and in special to Alessandro Scirè with which I share many things in common, specially music.

To the doctorate students: Raul Vicente, Juan J. Cerdá among others; with a special wink I want to thank for to the ex-students and companions of floor, now Doctors: Yanne Chembo, Marzena Ciszak and Marine Francesco for their company and debates about several common problems. The same for my friends of the laboratory Eng. Antonio Pujol Pere and Pascual Lopes.

Also it is important for me to mention all those students who have shared expenses and works in the floor where we lived and that were not physical; good memories I have of Numinato, David, Vibka, Silvio, Sonia and Pedro. Either forgetfulness to my older friends here in Europe, the portuguese Cristina Copaan, Joao Bacelo, Maria Joao (a Joao), Maria Guedes (Zeza), Renata Freitas

(Renatinha). In my dear Brazil: to Israel, Denilson, Ely, Rita, Yamiles, Jose Roberto and the professors of the University from Amazonas Dr Ivan Tribuzzy, M. Raffaele Novellino, Dr. Ricardo R Souds and the imcomparable Dr Wilson (I still have kept that dollar).

Finished the part of the educational ones, now gratefulness for my friends with who I have shared opera, excursions, and hundreds of discussions about the most varied subjects; wonderful situations that have filled many of my days: of Sri Lanka, Sanji; of Cuba, Juvenal, of Dominican Republic, Marty; the Majorcans Josep Francesc, Pere, Xisca, Javier, Ana, Tano. Finally I want to mention my family: my parents Jaziel and Iacy, my sisters Eurenice and Euris, my brother Eurisom and my uncle Eude. And to Isabel who has supported me and has helped me in the conclusion of this work.

Thank you very much to all of you.

#### Bibliografia

- [a] W. Korneta, I. Gomes, C. R. Mirasso, R. Toral, Experimental study of stochastic resonance in a Chua's circuit operating in a chaotic regime, *Physica D* **219**, 93 (2006).
- [b] I. Gomes, C. Mirasso, R. Toral and O. Calvo , Experimental Study of High Frequency Stochastic Resonance in Chua Circuits *Physica A* **327** , 115 (2003).
- [c] O. Calvo, I. Gomes, C. Mirasso and R. Toral, Experimental observation of coherence and stochastic resonances en an electronic Chua circuit, AIP Conference Proceedings of the 6th ECC, Potsdam, Germany, **622**, 427 (2002).
- [d] I. Gomes, J. M. Buldú; C. R. Mirasso; J. García-Ojalvo, Synchronization by dynamical relaying in electronic circuit arrays , *Chaos* **16**, 043113 (2006).
- [e] I. Gomes, S. De Monte, F. d'Ovidio, R. Toral, C.R. Mirasso, Coherent regimes of mutually coupled Chua's circuits, *Physical Review E* **73**, 1-7 (2006).



Parte I

**Sistemas dinámicos: sincronización de un  
sistema caótico con señales externas**



# 1. Introducción

Uno de los principales objetivos del método experimental clásico es el de buscar relaciones de tipo causa-efecto en los fenómenos naturales. Newton sintetizó Física y Matemática, expresando varios problemas físicos de diferentes sistemas en forma de ecuaciones "diferenciales" que permiten predecir las sucesiones de acontecimientos en el transcurrir del tiempo. La metodología de Newton influyó en el pensamiento de los científicos durante cientos de años; bajo sus leyes, los fenómenos naturales parecían estar limitados apenas por la cantidad de información acerca del sistema. Estos sistemas descritos a través de ecuaciones diferenciales son conocidos como "sistemas dinámicos".

Sin embargo, a medida que se profundizaba en los estudios acerca de los sistemas dinámicos, los científicos se encontraron con la imposibilidad de resolver algunos fenómenos. Durante sus estudios, el matemático Henri Poincaré (1864-1912) detectó que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de los parámetros de ciertas ecuaciones conllevaban a grandes cambios en el final de un determinado proceso dinámico [1]. Esta observación es una de las características de un proceso dinámico hoy conocido como "caos determinista"; "caos" porque el comportamiento del sistema es aparentemente aleatorio pero "determinista" debido a que las ecuaciones que rigen el movimiento son deterministas.

Las implicaciones del descubrimiento de los comportamientos caóticos observados por Poincaré en los sistemas físicos, no estaban suficientemente claras en aquel momento. Aún así, Henri Poincaré estableció las bases para el estudio del comportamiento caótico donde una de las ramas de su estudio, la observación del comportamiento global del sistema dinámico, apuntaba hacia la resolución de problemas acerca del caos evitando los difíciles análisis de las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas. En las últimas décadas, gracias a los ordenadores, ha sido posible también obtener soluciones numéricas de estas ecuaciones. De hecho algunas de las soluciones proporcionadas por ordenadores fueron conocidas a través del trabajo de Edward Lorenz (1963) [2].

Lorenz mostró numéricamente que un sistema de ecuaciones dinámicas, con términos no lineales, podía tener un comportamiento no previsible a largo plazo. Lo importante de este comportamiento es que aparece dentro de una concepción determinista: en ciertos sistemas no es posible conocer su evolución con una precisión arbitraria más allá de cierto punto. El fenómeno que él observó llevaba la firma del caos. En los últimos años, gracias a los numerosos trabajos acerca de este tema, las investigaciones sobre el caos se han extendido de tal manera que se han encontrado comportamientos caóticos en muchos tipos de sistemas tales como: Láseres [3], reacciones químicas [4], sistemas astronómicos [5], circuitos electrónicos [6], sistemas biológicos [7] etc. Los experimentos con circuitos electrónicos que operan en régimen caótico, han obtenido, particularmente, un nuevo impulso en la década de los 90, a partir de los trabajos de L.M. Pecora y T.L. Carrol que estudiaron las condiciones en las cuales estos circuitos podían sincronizarse [8].

Para que un sistema dinámico simple tenga un comportamiento imprevisible, basta incluir en él términos aleatorios. Las primeras ideas de lo que hoy se denomina "procesos estocásticos o aleatorios" aparecen a final del siglo XIX e inicio del XX y los primeros trabajos estuvieron dedicados a estudiar fenómenos físicos y tecnológicos particulares, dado que en aquel momento, la teoría clásica de probabilidades no incluía estudio de esquemas aleatorios dependientes del tiempo. Un problema de este tipo, que incluye un término "de ruido", es común en la naturaleza y abre un campo de estudio extenso que puede ser considerado como otro problema fundamental de solución complicada a partir de los análisis de las ecuaciones dinámicas. Ese problema había sido olvidado por la Mecánica Clásica que se preocupaba solamente de los modelos llamados "deterministas".

En general, la aleatoriedad es tomada como algo indeseable. Por ejemplo, desde la creación de la radio se hace notar en las transmisiones de información; las famosas interferencias del sonido, que en el caso de la radio causaban algunos trastornos en la recepción. Este tipo de interferencia fue llamada "ruido" y en la mayoría de los aparatos electrónicos se utilizan diversos tipos de filtros para suprimirlos a fin de "mejorar" la respuesta de estos sistemas electrónicos. Siendo así, era difícil imaginar que el ruido pudiera beneficiar la respuesta de algún sistema.

Pero un grupo de científicos, en 1981, describieron un mecanismo dinámico en el cual pequeñas perturbaciones podrían ser amplificadas por fluctuaciones ruidosas ambientales [9], [10], [11]. A este fenómeno se le denominó "resonancia estocástica". La resonancia estocástica, es un fenómeno no lineal que predice que la detección óptima de una señal débil ocurre en presencia de un cierto nivel de ruido. Este efecto exige en general tres ingredientes: una barrera de

activación energética, o más general, una forma de umbral; una señal de entrada débil, y una fuente de ruido que puede ser inherente al sistema o externa al mismo. En general el fenómeno de resonancia estocástica tiene lugar en sistemas biestables, aunque también ha sido observado en otros tipos de sistemas tales como los sistemas excitables.

Uno de los ejemplos de aplicación de resonancia estocástica ha sido propuesto por D. Chialvo y colaboradores [12], a un fenómeno conocido originalmente como "el problema de la fundamental ausente" (del inglés "missing fundamental") [13] que en este trabajo será referida como "resonancia fantasma". Este problema ha atraído la atención de científicos desde el siglo pasado. Básicamente se trata de un proceso por el cual el oído humano puede percibir señales que no están presentes en la serie espectral de la señal. D. Chialvo y colaboradores mostraron, utilizando un sistema excitable, que existe un nivel de ruido óptimo para el cual los máximos de las respuestas en su sistema correspondían a los máximos de probabilidad oídos por el ser humano.

Otro ejemplo de las propiedades beneficiosas de ruido se hace presente en un fenómeno conocido como "resonancia de coherencia", pero en este caso no es necesaria la presencia de un señal externa para que se obtenga una respuesta coherente en la salidad del sistema [14] , [15] , [16], [17].

Hoy estos temas, caos y aleatoriedad, han dado lugar a las más variadas investigaciones, habiendo una infinidad de publicaciones sobre los mismos. Es importante decir que la similitud de la evolución en el tiempo de los sistemas caótico y estocástico ha estado siempre presente. De hecho, la palabra "caos" es popularmente usada como referencia a procesos que en realidad son estocásticos y viceversa. La diferencia entre ellos queda definida por el conocimiento matemático acerca de la evolución de estos sistemas. Esta similitud, aliada al control tecnológico, ha dado lugar a varias posibles aplicaciones para ambos fenómenos. También es importante mencionar que estos dos fenómenos pueden coexistir, por lo que se abre la posibilidad de investigación de fenómenos que sucedan en un sistema caótico bajo los efectos del ruido.

Esta tesis está dividida en dos partes. En la primera parte de la tesis se analiza la sincronización del sistema con señales externas, teniendo como objetivo principal analizar los efectos del ruido actuando en un sistema caótico, en particular en un circuito electrónico de Chua. En este sistema se analizarán los tres últimos fenómenos mencionados: resonancia estocástica, resonancia de coherencia y resonancia fantasma. En la segunda parte de la tesis se estudia algunos aspectos de sincronización entre los propios circuitos de Chua.

En el capítulo 2 se hace una descripción general del sistema caótico experimental y de los métodos utilizados para conseguir las condiciones iniciales óptimas para observar el fenómeno de resonancia estocástica. A partir de esta

descripción será posible comprender mejor las relaciones existentes entre algunos de los diferentes parámetros de control del sistema.

En el capítulo 3 se presentan los principales resultados experimentales acerca de los fenómenos que serán estudiados. Una vez verificado el fenómeno de resonancia estocástica (apartado 3.2) será posible hacer un análisis acerca de la influencia de otros parámetros de control que pueden influir sobre la resonancia estocástica. Luego será estudiado el fenómeno de resonancia fantasma (apartado 3.3) y finalmente se observarán algunos de las principales características del fenómeno de resonancia de coherencia en un sistema caótico (apartado 3.4). En el capítulo 4 se mostrarán las conclusiones de esta parte.

## 2. Circuito electrónico de Chua

En este capítulo analizamos la respuesta del sistema de Chua bajo la variación de parámetros que priorizamos en las medidas experimentales. Estos experimentos se utilizan en las comprobaciones de los fenómenos estudiados en este trabajo. Para los que no están familiarizados con el sistema hemos incluido dos apéndices (A y B), que aportan algunos conceptos de los sistemas dinámicos con especial aplicación al sistema electrónico de Chua.

### 2.1 Introducción

Muchos trabajos acerca de caos utilizan el circuito de Chua como ejemplo clásico de un sistema caótico debido a su robustez, bajo costo y gran variedad de regímenes dinámicos que presenta; por ser uno de los únicos sistemas en que el comportamiento caótico tiene comprobación teórica, experimental y numérica; por ser simple de construir, lo que permite manipular fácilmente algunos de sus parámetros y mostrar una amplia gama de fenómenos relacionados con el comportamiento caótico. Estos parámetros pueden ser caracterizados por los componentes internos del sistema o, por componentes externos como señales sinusoidales, cuadradas, triangulares o ruidosas, que pueden ser fácilmente sumadas a él. En este sentido, a medida que ha aumentado el interés científico hacia el estudio de los fenómenos caóticos, el circuito electrónico de Chua ha ido obteniendo una gran importancia como objeto experimental, siendo utilizado en aplicaciones para analizar los más variados fenómenos, tales como: sincronización y resonancia de ondas, análisis de series de tiempos caóticos, análisis de bifurcaciones y atractores, control del caos; en aplicaciones como las comunicaciones seguras, sonido y música, etc, habiendo sobre él numerosas publicaciones [18].

Pero no todo acerca de este sistema es sencillo. Su propio comportamiento contrasta con la simplicidad de manipulación de los parámetros, ofreciendo nuevas posibilidades de investigación. Por ejemplo, en un simple experimento como la interacción entre una señal sinusoidal y ese sistema caótico, los efectos observados en la salida del sistema no están totalmente entendidos; su

investigación da lugar a nuevas formas de estudios acerca del caos tales como: eliminación de caos [19], fenómenos de sincronización de fases [20], etc.

Otras posibilidades experimentales aparecen cuando se suma al sistema una señal ruidosa y sinusoidal al mismo tiempo, que considerando además la dinámica interna del sistema, hace que aumente la complejidad y tipos de comportamientos que pueden observarse. Por lo tanto, es justo afirmar que no está totalmente claro lo que podría obtenerse en las salidas del sistema debido al gran abanico de posibilidades y de fenómenos que pueden aparecer utilizando los mismos ingredientes. En este sentido, si existe un fenómeno a ser analizado utilizando este tipo de forzamiento, es importante tener claras las características del fenómeno a estudiar. Tales características conducirán al experimentador a determinar los parámetros que serán utilizados en el sistema experimental para la observación de los fenómenos, pero para conseguirlo es necesario conocer algunas de las formas básicas de respuesta del sistema, bajo la variación de estos mismos parámetros.

Una de las herramientas usadas en las ciencias para caracterizar un determinado sistema es utilizar su propia respuesta cuando se halla sujeto a perturbaciones externas, o sea, observan el comportamiento global del sistema. Una técnica similar fue usada por Poincaré, la cual ha tenido como principal función prever el comportamiento global de sistemas complejos evitando descripciones complicadas basadas en las ecuaciones diferenciales [1]. Aquí se actuará de manera similar para explicar los resultados que se expondrán más adelante.

En realidad, varios de los efectos de la interacción del sistema caótico de Chua con señales externas sinusoidal y ruidosa son fundamentales en esta parte del trabajo, y los efectos de la variación de los parámetros externos definidos a través de estas señales servirán como herramienta de presentación del funcionamiento del sistema. El método de perturbar y observar el comportamiento global del sistema a través del espacio de fases es una forma cómoda para definir y explicar los efectos individuales de cada uno de los parámetros de control: la amplitud  $E_0$  y frecuencia  $f_0$  de la señal sinusoidal externa, la intensidad de ruido externo  $N$  y el valor de la resistencia variable  $R$  del circuito de Chua, son los más importantes. Se confía en que este procedimiento conduzca a una fácil metodología para explicar las observaciones experimentales.

El circuito de Chua usado en los experimentos puede verse en la *fig.2.1* [21], el funcionamiento del circuito es prototípico para la observación de fenómenos de resonancia estocástica, resonancia de coherencia y resonancia fantasma.

En estos experimentos se utilizó un generador de función Hewlett Packard HP 33120 para generar ruido blanco, una tarjeta de adquisición de datos digital de National Instruments NI - DAQ conectada a un ordenador para digitalizar la señal de salida del sistema con una frecuencia de muestreo suficiente, y

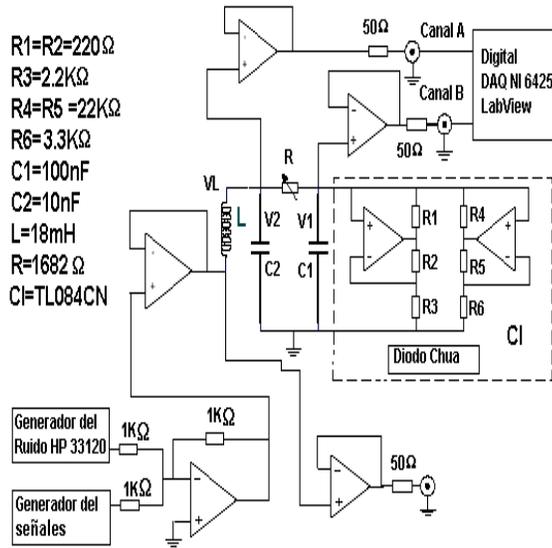


Fig. 2.1. Diagrama esquemático

finalmente, un programa Labview que controló la placa en modo de adquisición continua. Las señales externas fueron guardadas para análisis de gráficas según el tipo de fenomenología estudiada. Las ecuaciones dinámicas que describen este circuito, pueden ser obtenidas a través de las leyes Kirchoff , y tienen la siguiente forma

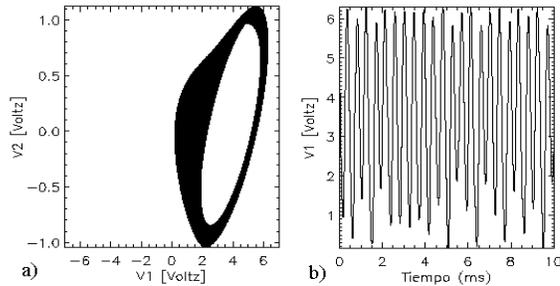
$$\begin{aligned}
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}V_2 + E(t) + N(t) \\
 \frac{dV_2}{dT} &= \frac{1}{C_2}i_L - \frac{1}{RC_2}(V_2 - V_1) \quad , \\
 \frac{dV_1}{dt} &= \frac{1}{RC_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}g(V_1)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Aquí  $g(V_R)$  es la función característica del componente no lineal, conocido como diodo de Chua [19] (apéndice B).  $E(t) = E_0 \sin(2\pi f_0 t)$  es la señal sinusoidal con amplitud  $E_0$  y frecuencia  $f_0$  y  $N(t)$  es ruido blanco gaussiano de media cero y variancia  $N^2$ .

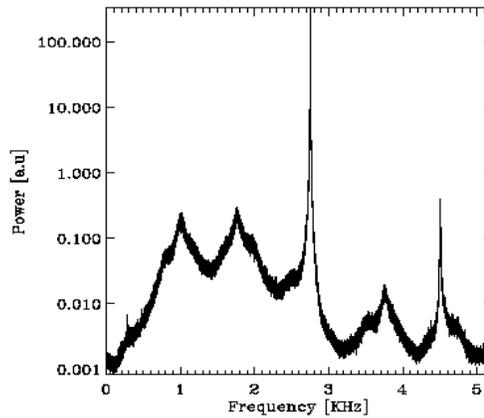
Para los parámetros escogidos y en ausencia de perturbación externa, los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  oscilan alrededor de un atractor caótico, el atractor espiral simple ( del ingles “single scroll”), que se muestra en la figura *fig.2.2-a*). En la *fig.2.2 -b*) se muestra la salida  $V_1$  en función del tiempo. En este caso, la

señal oscila con una frecuencia media de  $f_{ch} = 2.7kHz$ , que puede verse como un pico claro en la transformada de Fourier, *fig.2.3*.

Bajo el cambio de los parámetros internos o externos, el sistema puede hacer excursiones en torno a otro punto fijo, imagen especular del anterior, y de esta forma es posible observar el conocido espiral doble (del ingles “double-scroll”). La *fig. 2.4* presenta el atractor espiral doble (izquierda), y la salida  $V_1$  en función del tiempo (derecha).

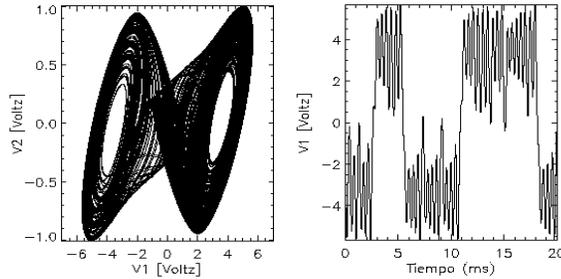


**Fig. 2.2.** a) Atractor típico del circuito de Chua en ausencia de forzamiento externo b) Salida  $V_1$  como función del tiempo.



**Fig. 2.3.** Transformada de Fourier de  $V_1$ . El pico más pronunciado está cerca de  $f_{ch} = 2.7kHz$ .

Es entre estos dos diferentes regímenes caóticos donde se espera observar los fenómenos estocásticos que serán expuestos más adelante. De esta manera,



**Fig. 2.4.** El atractor espiral doble que presenta el circuito de Chua (izquierda). La salida  $V_1$  como función del tiempo (derecha).

considerando el sistema inicialmente sintonizado en los valores de la *fig.2.1* se estudian los efectos de la variación de los parámetros a través de la observación directa de lo que puede ocurrir en las salidas  $V_1$  y  $V_2$  a través del espacio de fases. Con este análisis se espera:

- a) Explicar el funcionamiento del sistema experimental cuando sus salidas dinámicas presentan caos, e
- b) Identificar relaciones entre los parámetros de control ( $R$ ,  $E_0$ ,  $f_0$ ,  $N$ ) cuando éstos operan de forma conjunta para definir los valores óptimos ( $R$ ,  $E_0$ ,  $f_0$ ,  $N$ ).

Es importante recordar que el análisis de los parámetros del control, además de ayudar a entender el funcionamiento del sistema, sirve para definir las condiciones iniciales del sistema (parámetros óptimos) que permitirán la verificación de los fenómenos aquí relacionados. Debe tenerse en cuenta que algunas ideas descritas en este capítulo, sólo tendrán sentido completo cuando se discuta la fenomenología en el capítulo 3, donde se expondrá la problemática del fenómeno de resonancia estocástica; por eso, a medida que se juzgue necesario, se harán comentarios acerca de este fenómeno sin su previa definición; esto servirá para justificar el por qué de determinados análisis y podrá ser utilizado como referencia para lo que será explicado en los próximos capítulos. Puesto que la metodología de verificación para las dos otras fenomenologías que serán estudiadas son similares a de la resonancia estocástica, el estudio de los parámetros de control servirán también como puente para abordarlas.

Con estos objetivos los siguientes apartados están organizados de la siguiente manera: en el apartado 2.2 se analizará la influencia de la resistencia variable  $R$  en la respuesta del circuito de Chua. A partir de este parámetro se definirá la región donde las salidas del sistema operan de forma caótica. En el apartado 2.3, se considerará la influencia de cambios de la intensidad de amplitud  $E_0$  y frecuencia  $f_0$  de la señal externa. Una vez definida la región de

trabajo en el apartado 2.3 (región en que el sistema opera caóticamente), será posible analizar la respuesta del sistema bajo la influencia de estos parámetros de control y, como será expuesto, este procedimiento conducirá a una región umbral que servirá para la observación del fenómeno de resonancia estocástica. En el apartado 2.4 se discutirá la influencia del ruido  $N$  sobre el sistema. En él, el análisis del comportamiento del sistema de Chua bajo variaciones de pequeñas intensidades de ruido es similar al análisis de la intensidad de amplitud expuesta en el apartado 2.3. En el capítulo 3 se presentarán conceptos de las fenomenologías y los resultados principales de esta parte del trabajo.

## 2.2 Resistencia variable del circuito de Chua

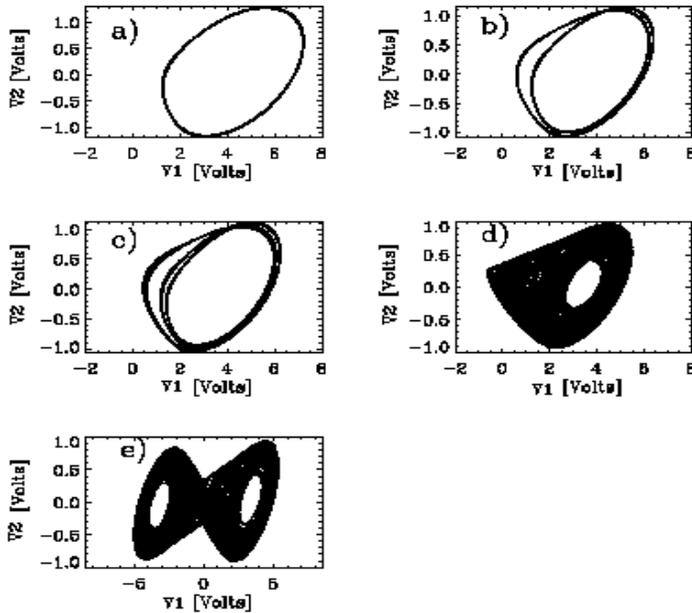
El circuito de Chua es un circuito electrónico autónomo que consta de tres elementos que almacenan energía, dos de los cuales son condensadores " $C_1$ ", " $C_2$ " y el tercero una inductancia " $L$ ". También posee una resistencia lineal " $R$ " y un componente no lineal " $N_R$ " denominado "Diodo de Chua". En el apéndice *B* y en la referencia [18] se encuentran características típica del diodo, las ecuaciones del circuito y un diagrama simplificado del circuito de Chua.

La resistencia variable del circuito de Chua  $R$  es el único parámetro interno del sistema que se analizó. Uno de los motivos es la facilidad de control experimental que permite la observación de una de las rutas típicas hacia el caos a través de duplicaciones de periodo. Algunos de los regímenes dinámicos observados en el oscilador caótico de Chua, bajo la variación de  $R$ , se muestran en la *fig.2.5*.

La *fig. 2.5* describe el comportamiento en el espacio de fases de las salidas  $V_1$  y  $V_2$  del circuito de Chua. Los valores de resistencia utilizados se encuentran en el intervalo,  $1.64k\Omega < R < 1.76k\Omega$ . Se observa que las salidas del circuito son caóticas para valores de resistencia cercanos a  $1.65k\Omega$  (*fig. 2.5-d*), donde la estructura del atractor es la del conocido atractor espiral simple, que tiene la misma estructura del atractor caótico de Rössler [22]. Vale mencionar que las líneas de voltaje podrían estar oscilando inicialmente en torno del otro punto fijo imagen especular, a la izquierda del que se mostró en la *fig.2.5*. En este caso el atractor será denominado como el atractor imagen especular del anterior.

De manera global es posible caracterizar los efectos de la variación de la resistencia variable  $R$  a través de la que se definirá como "órbita interna del atractor", que puede verse en la *fig.2.6*.

Aquí se llama órbita al conjunto de curvas en el espacio de fases que oscilan próximas a los puntos fijos del sistema; al alejarse la trayectoria del punto fijo puede generar un salto y los voltajes podrán oscilar en torno del otro punto fijo  $P+$  (no mostrado en la *fig.2.6*), dando forma al atractor imagen



**Fig. 2.5.** Típica secuencia de bifurcación: a) periodo 1 ( $R = 1.76k\Omega$ ). b) periodo 2 ( $R = 1.71k\Omega$ ). c) periodo 4 ( $R = 1.70k\Omega$ ). d) espiral simple ( $R = 1.65k\Omega$ ). e) espiral doble ( $R = 1.64k\Omega$ ).

especular. En general, esta órbita aumenta o disminuye al cambiar los valores de los parámetros del sistema; este hecho sirve para reconocer si el sistema es más o menos estable. Las palabras “estabilidad” e “inestabilidad” se refieren a la mayor o menor posibilidad de que las líneas que forman el atractor espiral simple puedan moverse hacia el atractor imagen especular.

Desde un punto de vista global la estructura espiral simple del atractor se mantiene para pequeños cambios de la resistencia variable del circuito, variaciones entre  $1.65k\Omega < R < 1.7k\Omega$  (circunstancia que puede ser observada en la *fig.2.7*).

En la *fig.2.7* se debe observar el hecho de que la órbita interna disminuye a medida que los valores de resistencia disminuyen. En particular, la órbita interna del atractor para el valor de resistencia  $R = 1.650k\Omega$ , la más pequeña, indica que el sistema se ha vuelto más inestable, aumentando la probabilidad de saltos entre los puntos fijos. Esto coincide con lo que se expuso en la figura *fig. 2.5(d-e)*, que para un valor cercano a  $1.64k\Omega$  el sistema bifurca, existiendo por tanto la posibilidad de moverse sobre el atractor espiral doble.

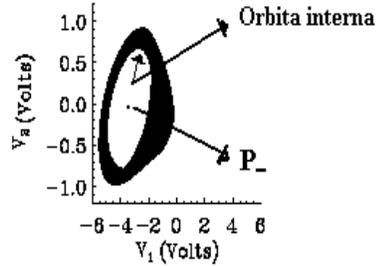


Fig. 2.6. Atractor imagen de espejo.

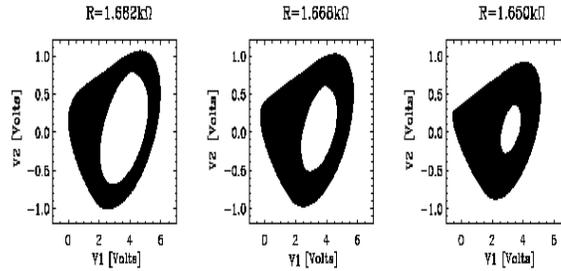


Fig. 2.7. Atractor espiral simple sin influencia de forzamiento externo para diferentes valores de la resistencia variable  $R = 1.682k\Omega, 1.668k\Omega, 1.650k\Omega$ .

En resumen, existen varios valores diferentes para  $R$ , para los cuales el sistema oscila caóticamente y con la misma configuración global del atractor espiral simple, pero no todos son adecuados para la observación de los fenómenos que se estudiarán. Se utilizará el comportamiento patrón del atractor caracterizado por su órbita interna para analizar la influencia sobre el sistema de los parámetros externos de control: la frecuencia  $f_0$ , la amplitud  $E_0$  y la intensidad del ruido  $N$ . En estos análisis se usará inicialmente el valor fijo de resistencia variable  $R$  de  $1.682k\Omega$ , ya que operando sobre este valor el circuito presenta, en el espacio de fases, el atractor espiral simple. Conviene recordar que el análisis del fenómeno de resonancia estocástica se realiza considerándose una determinada transición entre dos estados, así, el sistema de Chua ofrece dos estados diferentes que se caracterizan por sus dos formas distintas de atractores caóticos los cuales se han presentado en este apartado.

## 2.3 Frecuencia y amplitud

En las verificaciones numéricas o experimentales acerca del fenómeno de resonancia estocástica, se ha de garantizar que las transiciones de estado en los sistemas no sean producidas por la señal sinusoidal externa. Consecuentemente, se define un umbral para valores de intensidad, por debajo del cual, el sistema no cambie para ningún valor de la señal externa en ausencia del ruido. El umbral que se utilizará para analizar los fenómenos en el sistema caótico de Chua, corresponde a la transición del atractor espiral simple al doble, por medio de la variación de la frecuencia y de la amplitud de la señal externa.

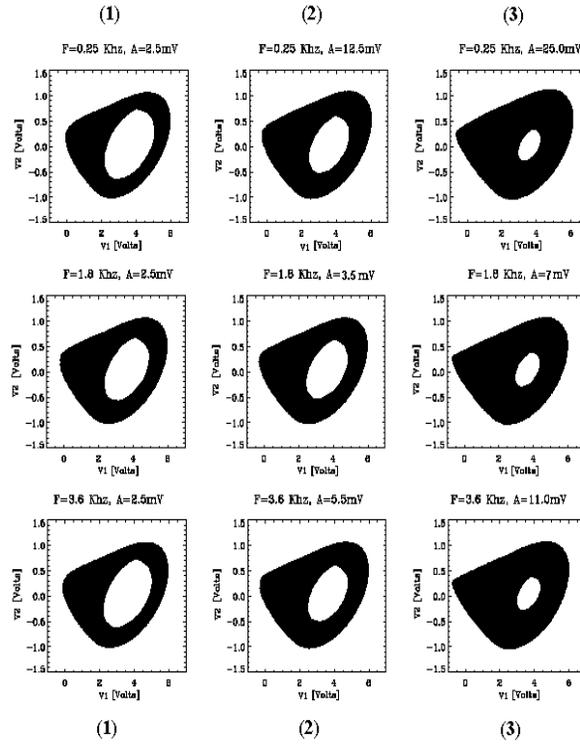
Para observar esta forma de control se suma una señal  $E = E_0 \sin(2\pi f_0 t)$  al sistema; luego, fijando la resistencia  $R$  y frecuencia  $f_0$ , se varía  $E_0$  lo que inducirá al sistema a un proceso de bifurcación. La variación de  $E_0$  permitirá determinar un valor límite de amplitud  $E_{\max}$  que no inducirá la aparición del atractor imagen especular; luego, tras tomar nota de este valor, se sintonizará el sistema a una nueva frecuencia  $f_0$  de la señal externa y se repetirá el experimento. El resultado de este procedimiento se halla en la *fig.2.8* y en la siguiente tabla.

$f_0$ (kHz)	$E_{baja}(mV)$	$E_{media}(mV)$	$E_{\max}(mV)$
0.25	2.5	12.5	25.0
1.8	2.5	3.5	7.0
3.6	2.5	5.5	11.0

Tabla 1. Variación de amplitud  $E$  para tres valores distintos de frecuencia  $f_0$ .

En la *fig.2.8* la columna 3, representa el comportamiento del sistema bajo el máximo valor de los pares de intensidad de amplitud  $E_{\max} = [25mV, 7mV, 11mV]$  al que cada atractor puede llegar sin que se den saltos entre los puntos fijos, para las frecuencias fijadas en  $[0.25kHz, 1.8kHz, 3.6kHz]$  respectivamente, como se detalla en la tabla anterior. Esto significa que con un pequeño incremento en la intensidad de amplitud el sistema se moverá sobre el atractor espiral doble. La columna 2 muestra el comportamiento del sistema para valores que son la mitad de la intensidad máxima de amplitud. En la columna 1 se utilizó el nivel más bajo de amplitud que admite el generador de señal.

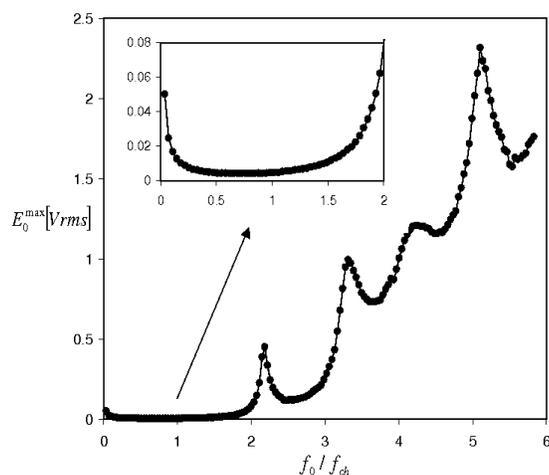
Conviene destacar la particularidad de que a medida que se aumenta la amplitud de la señal manteniendo la frecuencia fija, la órbita interna del atractor se reduce; esta situación es cualitativamente similar a disminuir los valores de  $R$  del circuito de Chua (*fig.2.7*). De la misma forma que  $1.654k\Omega$  es un valor umbral para que no se den saltos entre los puntos fijos inestables, los valores de  $E_0$  iguales a  $7mV$ ,  $11mV$ ,  $25mV$  son también valores umbrales.



**Fig. 2.8.** Espacio de fase  $V_1$  y  $V_2$  bajo influencia de la señal externa. El valor de resistencia fue fijado en  $R = 1.682K\Omega$ .

Esto confirma que la presencia de la señal sinusoidal externa puede inducir una configuración global semejante (atractor estable o inestable) a la que se consigue al variar  $R$ , pero, diferentemente de lo que ocurre con la resistencia donde un solo valor puede representar el umbral, los valores de amplitud y frecuencia definen puntos umbrales diferentes. Para hacer una identificación general de estos puntos basta repetir el experimento utilizando otros valores de frecuencia y amplitud. El resultado está representado en la *fig.2.9*.

En la *fig.2.9* están representadas las amplitudes umbrales en función de la frecuencia, normalizada por la frecuencia media del sistema que es aproximadamente  $f_{ch} = 2.7kHz$ . Este resultado determina la región umbral entre los atractores espiral simple y doble e indica cuales son los valores de frecuencia que necesitan menores niveles de amplitud que conduzcan al sistema al punto de máxima inestabilidad sin que ocasionen saltos entre los puntos fijos. Como ya se expuso con anterioridad, éstos puntos de máxima inestabilidad se caracterizan por la órbita del atractor espiral simple. Particularmente, las frecuencias



**Fig. 2.9.** La máxima amplitud en función de la frecuencia que no permite saltos entre los atractores dinámicos. La resistencia constante utilizada fue de  $R = 1.682k\Omega$ . El eje de las abscisas está normalizada por el valor medio de oscilación del sistema  $f_{ch} = 2.7kHz$ .

entre el intervalo  $0.5 < f_0 < 1.5$  observados en los puntos de mínimo de la curva (ver panel inferior de la *fig. 2.9*), define un intervalo de resonancia entre dinámica interna del sistema de Chua y la señal externa, hecho que se caracteriza por los menores valores de amplitud necesarios para provocar saltos entre los atractores. Se puede observar asimismo la presencia de máximos, que indica que para ciertas frecuencias la amplitud externa debe ser bastante mayor para provocar saltos.

Debido a que el estudio de resonancia estocástica utilizando frecuencias del mismo orden de magnitud del sistema es inusual en la literatura, se estudiará la posible observación del fenómeno de resonancia estocástica utilizando frecuencias como  $f_0 = 0.9kHz, 1.8kHz, 2.7kHz, 4.7kHz$ .

Resumiendo: se ha definido un umbral a partir del estudio de la variación de los parámetros de amplitud y frecuencia de la señal externa, que será utilizado en análisis del fenómeno de resonancia estocástica. Una de las consecuencias directas de lo que se ha mostrado es la dependencia del umbral a la frecuencia de la señal externa, caso contrario a lo que sucede en otros estudios acerca del fenómeno de resonancia estocástica, en los que en el umbral no depende de ésta.

### 2.3.1 La acción conjunta entre $R$ y $F(t)$

Una de las verificaciones que se debe hacer inicialmente antes de estudiar el fenómeno de resonancia estocástica, consiste en precisar si el atractor espiral simple puede contener las energías de las señales externas para que no se den saltos entre los atractores caóticos. A través de lo que se estudió acerca de la dependencia de la dinámica del circuito de Chua bajo las variaciones de los parámetros  $R$ ,  $E_0$  y  $f_0$ , ahora es posible identificar una relación entre ellos que defina la condición inicial del circuito electrónico, representada por  $R$ , que satisfaga la condición para obtener resonancia.

Se ha visto que para  $R = 1.64k\Omega$ , el sistema se mueve en el atractor espiral doble aún sin señal externa (*fig.2.5-e*). Para  $R = 1.65k\Omega$  la órbita interna del atractor espiral simple es inicialmente muy pequeña (*fig.2.7*), de forma que al sumar una señal externa con frecuencia de  $f_0 = 1.8kHz$  aparecerán saltos entre los puntos fijos inestables bajo una intensidad de amplitud tan pequeña como  $2.5mV$ . Por lo tanto estos dos valores de resistencias no son adecuados, puesto que inicialmente hay que garantizar que los saltos no se produzcan debido a la señal sinusoidal externa. Si la resistencia se establece en  $R = 1.7k\Omega$  el hecho de sumar una frecuencia externa igual a  $f_0 = 1.8kHz$  y al variar  $E_0$  provocará que el valor umbral sea mucho mayor que  $7mV$ . Se debe tener presente que el valor de  $E_0 = 7mV$  es el valor umbral mostrado en la *fig. 2.8* (columna 3) cuando el sistema opera bajo valores fijos de  $R = 1.682k\Omega$  y frecuencia  $f_0 = 1.8kHz$ . En este caso la respuesta del sistema puede no maximizar adecuadamente la señal, como se verá más adelante.

Por lo tanto al producir cambios en  $R$  también se producirán cambios en los valores umbrales de  $E_0$  y  $f_0$  y su efecto será el desplazamiento vertical de la curva umbral observada en la *fig.2.9*; esto puede confirmarse repitiendo el experimento anterior (para  $E_0$  y  $f_0$ ) construyendo nuevas curvas bajo diferentes valores de  $R$ .

Debido a lo expuesto con anterioridad, se ha escogido el valor  $R = 1.682k\Omega$  ya que ha resultado ser el valor adecuado para que se de la condición de resonancia y será el que se usará en los procedimientos experimentales para la observación de los fenómenos que se estudiarán en los próximos apartados.

## 2.4 Ruido

La obtención del ruido blanco con tiempo de correlación cero y un espectro de potencia que permanezca plano hasta frecuencia infinita es una idealización. El ruido en sistemas reales siempre tiene un tiempo de correlación finito y correspondientemente presenta un espectro no totalmente plano para algunas

frecuencias. No obstante, el tiempo de correlación del ruido suele ser muy pequeño. Para la realización experimental de los diferentes procesos en los que se involucran las señales ruidosas de ruido blanco gaussiano de media cero se ha usado un generador de ondas Hewlett Packard HP33120A que es un generador con un ancho de banda igual a 15MHz. La señal ruidosa que genera es del tipo gaussiano con un ancho de banda de 10MHz, y puesto que dicho valor es mucho mayor que el de las frecuencias características del circuito oscilador utilizado en este trabajo, se puede considerar un ruido del tipo gaussiano blanco de media cero.

En general para la caracterización del ruido se utilizan valores estadísticos, como la desviación estándar, y la media aritmética. Este procedimiento para la caracterización del ruido ha sido utilizado en este trabajo.

Desde el punto de vista de causa y efecto de la señal ruidosa sobre el atractor caótico, la respuesta del sistema operando solamente bajo un determinado nivel de ruido presenta algunas semejanzas con la respuesta del sistema operando solamente bajo los cambios de amplitud de la señal externa. Una de estas similitudes aparece con la posibilidad de encontrar un valor de la intensidad de ruido, "valor umbral" válidos para tiempos de observación típicos, que lleve al sistema a su punto más inestable; por tanto, valores mayores de este valor umbral provocarán los saltos entre los puntos fijos inestables (para un tiempo de observación no muy largo).

El acercamiento al punto más inestable también puede caracterizarse por la órbita interna del atractor caótico, que será cada vez menor conforme se aumente la intensidad de ruido.

También resulta similar la dependencia de la intensidad de ruido  $N$  al valor de la resistencia variable  $R$  del circuito, o sea, para un tiempo dado de observación, el valor de la resistencia variable también puede controlar la intensidad del ruido que será necesaria para provocar saltos entre los puntos fijos, en el sentido que el valor de la intensidad de  $N$  podrá ser mayor o menor dependiendo del valor de resistencia  $R$ .

En el caso de la interacción del sistema sólo con ruido externo sin señal periódica externa es posible obtener un fenómeno conocido en la literatura como "resonancia de coherencia", en el que un valor de ruido provoca "orden" en la respuesta del sistema [14], [15], [16].

## 2.5 Resumen

Bajo análisis experimental se expuso el comportamiento del circuito en varios estadios que fueron conseguidos a partir de la variación de los parámetros de control ( $R$ ,  $f_0$ ,  $E_0$ ,  $N$ ).

A partir de este análisis fue posible observar los valores de resistencia  $R$  frecuencia  $f_0$  y amplitud  $E_0$  donde el circuito se comporta de manera más inestable, esta estabilidad se ha definido de forma global, según la aproximación de la órbita interna del atractor espiral simple al punto fijo. Por ejemplo, bajo la influencia de la señal sinusoidal, se utilizó la órbita interna del atractor para caracterizar los puntos de máxima inestabilidad, entonces se definieron los valores de los parámetros de control  $(f_0, E_0, R)$  que serán útiles para el estudio del fenómeno de resonancia estocástica.

En cuanto al ruido, principalmente se comentó que, desde un punto de vista de causa y efecto de la señal ruidosa sobre el sistema, en particular sobre el atractor caótico, su comportamiento para valores de intensidad pequeña es parecido a la influencia de la intensidad de la señal sinusoidal, siendo por tanto posible vislumbrar un cierto valor umbral, al menos para tiempos de observación típicos. Esto es importante para garantizar que el sistema desde un punto inicial pueda contener las energías de ambas señales externas.

En el siguiente capítulo se presenta la detección experimental de los fenómenos estocásticos: resonancia estocástica, resonancia de coherencia y de resonancia fantasma. Para ello el sistema experimental estará sintonizado en los parámetros de control definidos en este capítulo.

## 3. Observación experimental de fenómenos estocásticos en un sistema caótico

En el capítulo anterior se han definido los valores de los parámetros de control a través del estudio de la respuesta del sistema. En este capítulo, se estudiarán los fenómenos de resonancia estocástica y de coherencia que se dan cuando el sistema está sujeto a una fuente externa de ruido. También se presentará una aplicación a este tipo de resonancia a través de la detección del fenómeno de la resonancia fantasma (“missing fundamental”). Los resultados serán expuestos según cada tema discutido.

### 3.1 Introducción

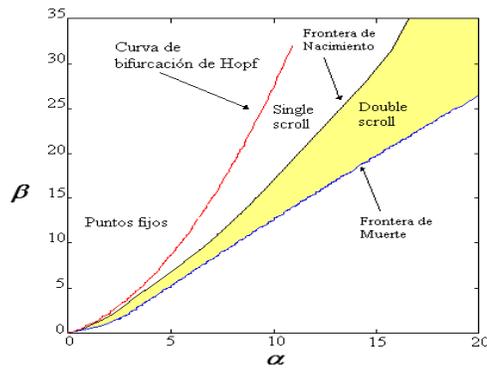
En las últimas décadas se han mantenido discusiones sobre diferencias y similitudes entre el llamado caos determinista y ruido estocástico; han sido desarrolladas nuevas tecnologías y modelos, a través de los cuales, se han garantizado herramientas que sirven para la caracterización de estos dos tipos de comportamientos. En el caso de los sistemas caóticos, los exponentes de Lyapunov, el mapa de Poincaré, son algunos ejemplos de modelos y métodos para la caracterización del caos; en el caso del aleatorio, el movimiento Browniano ha sido modelado por las ecuaciones de Langevin e innumerables científicos han colaborado en los fundamentos de fenómenos aleatorios y han mostrado, por ejemplo, la importancia del ruido blanco [23] .

Consecuentemente, fenómenos como el de resonancia estocástica han alcanzado cierto grado de importancia cuando la comunidad científica ha comprendido que un nivel óptimo de ruido puede mejorar la respuesta de algunos sistemas, contrariamente a lo que se sabía acerca de sus efectos destructivos. Hay que tener en cuenta que dependiendo del problema tratado los efectos del ruido pueden no ser eliminados totalmente; el ruido térmico es un ejemplo. A partir de los trabajos de Poincaré y Lorenz, entre otros, se sabe que los fenómenos caóticos también están presentes en la naturaleza, por lo tanto la idea de que caos y aleatoriedad coexistan en un mismo sistema y que se pueda experimentar en un sistema caótico actuando con ruido es bastante natural y, por qué no, lógico.

Una de las posibilidades de que caos y aleatoriedad puedan observarse en un mismo sistema ha sido demostrada teórica y numéricamente por Anishchenko y colaboradores utilizando el sistema caótico de Chua [18], [24].

Para demostrar numéricamente el fenómeno de resonancia estocástica en el circuito de Chua, V. S. Anishchenko utilizó la condición de biestabilidad [25], la relación señal ruido, histogramas de tiempos y un umbral particular.

El umbral entre los atractores caóticos del circuito de Chua que Anishchenko muestra en su trabajo, ha sido conseguido sin ningún forzamiento externo y ha servido para ilustrar los diferentes comportamientos dinámicos que pueden detectarse en las salidas del circuito de Chua así como para definir la región de trabajo en que sería observado el fenómeno de resonancia estocástica, o sea, la región entre los atractores espiral simple y doble que está mostrada en la *fig.3.1*; en la figura 3.1  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros que dependen de los valores de los componentes del circuito de Chua (apéndice B). Cabe observar que este umbral es diferente del que se utilizará en este trabajo, el cual ha sido construido a través de la interacción entre la señal sinusoidal externa y el sistema caótico, como ha sido representado en la *fig.2.9*, en el capítulo anterior.



**Fig. 3.1.** diagrama de bifurcaciones globales en el plano  $\alpha, \beta$ .

Las herramientas usadas por Anishchenko fueron las mismas utilizadas para cuantificar la resonancia estocástica en otros sistemas tales como: sistemas climáticos [9], biológicos (como percepción humana de señales auditivas [26] o visuales [27]), o en caracterización del fenómeno de resonancia estocástica en sistema físicos, como el caso clásico del sistema del pozo de potencial [28] etc.

El interés aquí es la verificación experimental de la resonancia estocástica usando el mismo sistema caótico utilizado por Anishchenko aunque operando en régimen distintos, además de los fenómenos de resonancia de coherencia y

resonancia fantasma. La resonancia de coherencia tiene gran similitud con el fenómeno de resonancia estocástica, con la diferencia que el único elemento externo que promueve coherencia en el sistema es el ruido. Tal vez debido a esta característica, la resonancia de coherencia sea en realidad el típico ejemplo de resonancia estocástica, pues solamente es necesario el ruido externo para observar que el sistema puede tener un comportamiento más coherente. La resonancia fantasma puede ser vista aquí como una aplicación del fenómeno resonancia estocástica.

Este fenómeno ha llamado la atención de la comunidad científica debido a sus características biológicas, o quizás psicofísicas, a la cuestión del por qué el oído humano consigue oír determinadas frecuencias que no están presentes en la señal externa. Es, por lo tanto, un fenómeno atractivo debido al tiempo que hace que esta cuestión permanece sin respuesta, por su complejidad e importancia. Pero la intención aquí no es explicarlo y sí señalar que los efectos observados también pueden ser aplicados al control de los fenómenos de comportamientos caóticos.

Por tanto en los próximos apartados se muestran las verificaciones experimentales de los fenómenos de resonancia estocástica, fantasma y de coherencia, en el circuito electrónico de Chua operando en el régimen caótico, de modo que, los temas que se desarrollan a continuación están organizados de la siguiente manera: En el apartado 3.2 se estudiará el fenómeno de resonancia estocástica, reservando el apartado 3.3 al estudio del fenómeno de resonancia fantasma mientras que en el apartado 3.4 se estudiará el fenómeno de resonancia de coherencia.

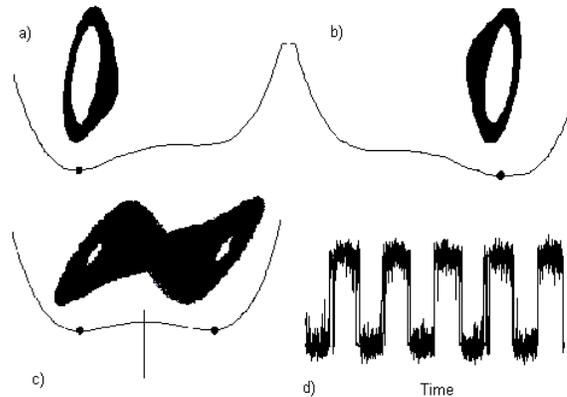
En la actualidad existen numerosos sistemas, en diversas áreas, donde se ha observado la resonancia estocástica y la resonancia de coherencia, y sobre muchos de estos sistemas existen resultados experimentales, así como teóricos o numéricos, bajo un gran número de condiciones. Su observación experimental en un sistema caótico, en particular en el sistema de Chua, es la contribución de este trabajo a este tema. Vale remarcar que la resonancia estocástica se ha estudiado típicamente en frecuencias mucho más bajas que la frecuencia interna del sistema, cuando estos poseen una dinámica interna; en el presente trabajo la resonancia estocástica estará sujeta a altas frecuencias, o sea, frecuencias del mismo orden de magnitud de oscilación media del sistema de Chua,  $2.7kHz$ .

### 3.2 Resonancia estocástica en un sistema caótico

Resonancia estocástica es un efecto en el cual la respuesta del sistema dinámico a una perturbación externa es optimizada por la presencia de un cierto nivel de ruido. El fenómeno se produce, por ejemplo, cuando una partícula en

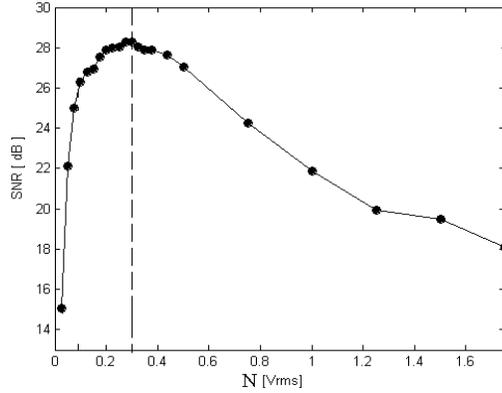
un potencial de dos pozos es sometida a una fuerza que oscila en el tiempo. Si la fuerza no es suficientemente intensa como para sobrepasar la barrera entre los pozos, entonces la partícula sólo puede saltar de pozo a otro mediante un proceso de activación térmico (estocástico). Si la temperatura es muy baja, la partícula permanecerá un largo tiempo en el pozo de partida. Por otro lado, si la temperatura es muy alta, la partícula se difunde como si el potencial no estuviera presente. Por tanto, deberá existir una temperatura en la cual la partícula salta de un pozo a otro de forma sincronizada con la perturbación externa, es decir, una temperatura para la cual la correlación entre el forzamiento o señal externa y la respuesta del sistema sea máxima [29]. Experimentalmente, el fenómeno de resonancia estocástica fue demostrado por primera vez en un circuito electrónico conocido como “Schmitt trigger” [30].

Algunos sistemas caóticos también manifiestan ciertas semejanzas fundamentales con el modelo del movimiento browniano. De acuerdo con Anischenko y otros, algunos sistemas dinámicos que bifurcan hacia el caos pueden ser considerados, en un sentido general, biestables [8], [31]. El circuito de Chua es un modelo de este tipo de comportamiento: a través de la elección adecuada de parámetros en el que coexisten atractores de tipo espiral, al variar la frecuencia de alguna señal sinusoidal externa se puede dar inicio a un proceso de saltos entre los atractores, y luego, para una frecuencia aún mayor, volver a su comportamiento espiral simple; este proceso es una característica de biestabilidad. La relación intuitiva de las semejanzas entre el modelo del movimiento browniano y el modelo caótico pueden ser observadas en la *fig.3.2*, que sencillamente muestra que el atractor puede representar el punto fijo en el modelo del pozo de potencial.



**Fig. 3.2.** Relación intuitiva entre los modelos browniano y caótico.

Una de las formas más comunes de caracterizar la resonancia estocástica es a través de la relación señal ruido (SNR) y el resultado típico, un máximo en la SNR, se muestra como ejemplo en la *fig.3.3*.



**Fig. 3.3.** Relación señal ruido (SNR). Representación de una curva típica de resonancia estocástica.

La curva mostrada en la *fig.3.3* indica que la intensidad de la señal aumenta con la intensidad del ruido hasta que llega a un máximo, que indica la resonancia máxima entre la respuesta del sistema con la señal de entrada; luego la intensidad decrece, lo que significa pérdida de resonancia.

En general la relación señal ruido puede ser definida de varias formas, la medida más intuitiva puede ser descrita así: dada una señal de entrada

$$s(t) = \varepsilon \sin(\omega_0 t), \tag{3.1}$$

la SNR debe medir cuánto contiene la señal de salida  $y(t) = g(s(t))$  a la frecuencia de la señal de entrada  $\omega_0$ , por lo tanto

$$SNR \propto \log \frac{S}{N} \propto \log \frac{S(\omega_0)}{N(\omega_0)} dB. \tag{3.2}$$

La potencia  $S = |Y(\omega_0)|^2$  es la magnitud del espectro de potencia de salida calculada en la frecuencia de entrada  $\omega_0$ .  $N$  es el ruido y  $N(\omega_0)$  es el espectro de ruido de fondo calculado en la frecuencia de entrada es algún promedio de  $|Y(\omega_0)|^2$  en las frecuencias cercanas [32]. La transformada discreta de Fourier

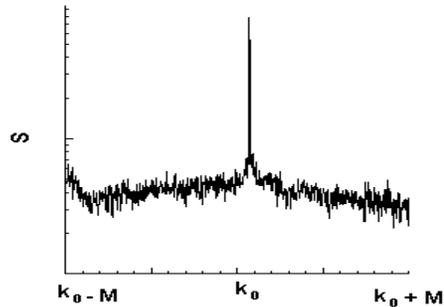
$Y[k]$  para  $k = 0 \dots L - 1$  es una suma ponderada de exponenciales de los elementos de una secuencia de tiempos discretos  $\{y_0, y_1 \dots y_{L-1}\}$  de muestras de la señal de salida

$$y[k] = \sum_{t=0}^{L-1} y_t e^{-\frac{2\pi kt}{L}}. \quad (3.3)$$

La frecuencia de la señal  $\omega_0$  corresponde al  $k_0$  en la transformada Fourier a través de la relación del elemento entero  $k = L\Delta t f_0$  y  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . De esto resulta la señal de salida en términos de transformada de Fourier como  $S = |Y[k_0]|^2$ . La potencia de ruido  $N = N[k_0]$  es la potencia media en los puntos adyacentes  $k_0 - M, \dots, k_0 - 1, k_0 + 1, \dots, k_0 + M$ , para algunos enteros  $M$  [33], que está dada por

$$N = \frac{1}{2M} \sum_{j=1}^M \left( |Y[k_0 - j]|^2 + |Y[k_0 + j]|^2 \right). \quad (3.4)$$

Este resultado está representado gráficamente en la *fig.3.4*

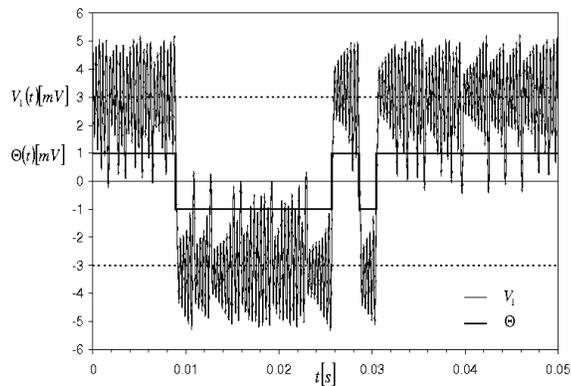


**Fig. 3.4.** Transformada de Fourier generalizada.

La SNR es solamente una de las formas que puede ser utilizada para medir la resonancia estocástica, pero la simple inspección de la transformada de Fourier a través de la medida directa del pico a frecuencia correspondiente puede ser suficiente. Esta forma de medición, conocida con el nombre de "factor de amplificación"  $\eta$ , también será utilizada.

Una forma alternativa de caracterización de la resonancia estocástica es usar la distribución del tiempo de residencia  $t_r$  y de pulso  $t_p$ , usando un método de digitalización o método de los dos estados; en este método la función  $y(t)$  ( $V_1$  en

la figura) es sustituida por una secuencia de pulsos cuadrados con amplitud  $+1$  o  $-1$ . La señal digitalizada es representada en la *fig.3.5* por  $\theta(t)$ . El tiempo de residencia  $t_r$  se define como el tiempo durante el cual el sistema permanece en un atractor  $+1$  o en el atractor imagen  $-1$ . El tiempo medio de pulso  $t_p$  es el tiempo entre dos transiciones de estado consecutivas, o alternativamente, la suma de dos tiempos de residencia  $t_r$  consecutivos en diferentes atractores. En cualquiera de los casos la resonancia estocástica ocurre, aproximadamente, cuando el tiempo medio  $(t_r, t_p)$  coincide con el periodo de la señal externa  $(1/2f_0, 1/f_0)$  respectivamente.



**Fig. 3.5.** Serie de tiempos.

En el apartado 3.2.1 se mostrarán los resultados principales acerca del estudio experimental de resonancia estocástica para frecuencias del mismo orden que la frecuencia interna del circuito de Chua. Como fue mencionado, el estudio se realizará utilizando los siguientes valores de frecuencia externa  $f_0 = 0.9kHz$ ,  $1.8kHz$ ,  $2.7kHz$ ,  $4.7kHz$  con  $R = 1.682k\Omega$ . Una vez verificado el fenómeno, serán posibles otros análisis utilizando la variación de los parámetros de control del sistema. Un análisis de este tipo enriquece el conocimiento acerca del fenómeno de resonancia estocástica en este sistema caótico. Así, en el apartado 3.2.2 serán estudiados los efectos de la variación de la amplitud sobre el fenómeno de resonancia estocástica y en el apartado 3.2.3, se estudiarán los efectos de pequeñas variaciones de la resistencia  $R$  del circuito de Chua sobre el fenómeno.

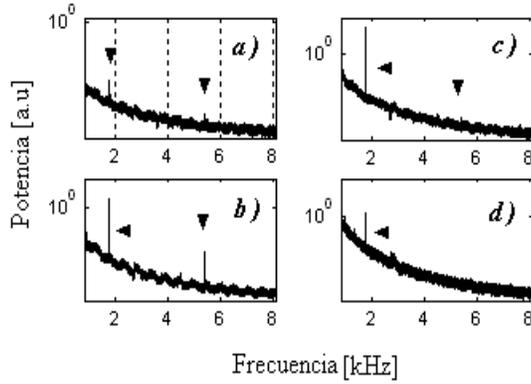
### 3.2.1 Amplificación de señales deterministas

La resonancia estocástica a altas frecuencias es la observación del fenómeno para frecuencias del mismo orden que la frecuencia interna del sistema de Chua,  $f_{ch} \approx 2.7kHz$ . El circuito está conectado como en la *fig. 2.1*, cuando el circuito opera bajo la influencia de alguna perturbación externa  $V_1$  puede oscilar aproximadamente entre  $-6V$  y  $+6V$ . El procedimiento experimental, basado en lo que fue justificado en el capítulo anterior, ha sido el siguiente: se ha fijado el valor de la resistencia  $R = 1.682k\Omega$  del circuito de Chua. En ausencia de perturbación externa el voltaje  $V_1$  y  $V_2$  oscila alrededor de uno de los puntos fijos inestables con la frecuencia media de  $f_{ch}$ , sin posibilidades de saltos entre los atractores. Luego se ha añadido una señal sinusoidal  $E(t) = E_0 \sin(2\pi f_0 t)$  con frecuencia  $f_0 = 1.8kHz$  y amplitud  $E_0 \approx 5mV[rms]$  cercana al umbral, de modo que la señal por si misma es insuficiente para inducir saltos entre los atractores caóticos; entonces se ha añadido ruido al sistema y se ha variado su intensidad hasta el valor de  $1.75V[rms]$ . A través de la adquisición de las series de salida  $V_1$  se ha calculado la transformada de Fourier correspondiente a cada valor de ruido  $N$ .

El resultado obtenido se muestra en la *fig. 3.6(a - d)*, que describe el crecimiento y decrecimiento de la potencia de la señal externa, bajo los valores de ruido  $N = 0.0375V[rms]$ ,  $N = 0.1125V[rms]$ ,  $N = 0.3V[rms]$ ,  $N = 1.75V[rms]$ , respectivamente. Se observa en la *fig. 3.6(b)* el aumento de la potencia para el tercer armónico de la señal de entrada para un valor del ruido óptimo  $N = 0.1125V[rms]$ . La aparición de resonancia estocástica en los armónicos todavía no está totalmente entendida en los sistemas caóticos. En la *fig. 3.6(c)* se muestra la máxima potencia para la frecuencia fundamental, que ocurre bajo el valor óptimo de  $N = 0.3V[rms]$ . Es interesante ver que bajo el valor óptimo de ruido el armónico sufre un decrecimiento considerable, significando esto que los niveles de ruido influyen de manera diferente en la señal y en el sistema. Para una mayor intensidad del ruido externo la potencia de la señal externa decrece, conforme es mostrado en la *fig. 3.6(d)*.

A través de la transformada de Fourier se observa que el ruido coopera con el aumento de la potencia de la señal externa hasta que alcanza un máximo;  $N = 0.3V[rms]$  para el armónico fundamental y  $N = 0.1V[rms]$  para el tercer armónico. Luego decrece. Este resultado ya caracteriza la resonancia estocástica. En la *fig. 3.7* se muestran los resultados gráficos de la SNR para la frecuencia fundamental y para su tercer armónico. Puede observarse en la curva un máximo en el SNR es la firma del fenómeno de resonancia estocástica.

Estos resultados evidencian que el fenómeno de resonancia estocástica, caracterizado por el aumento de la potencia de la señal externa observado en la salida del sistema, puede darse en un sistema caótico operando bajo un valor



**Fig. 3.6.** Espectro de potencia para cuatro series de la señal de salida del sistema bajo los valores constantes de frecuencia  $f = 1.8kHz$ , amplitud  $E_0^{\max} = 5mV[rms]$ , resistencia variable del circuito de Chua  $R = 1.682k\Omega$ . En la columna 2 está el armónico fundamental y en la columna 3 su respectivo armónico  $f_a = 5.4kHz$ .

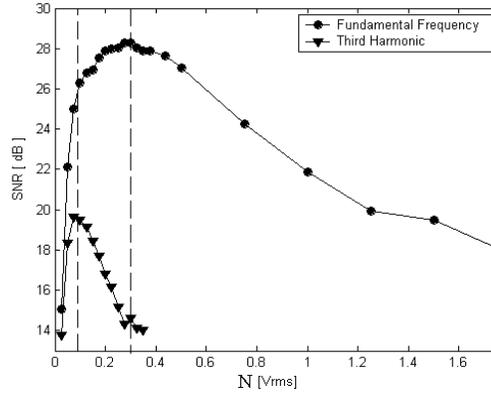
de frecuencia relativamente alto en relación a la frecuencia de oscilación del sistema  $f_{ch}$ .

La *fig.3.8* muestra la SNR para las frecuencias fundamentales,  $f_0 = 0.9kHz, 1.8kHz, 2.7kHz, 4.7kHz$ . Aunque es posible observar resonancia estocástica en la frecuencia fundamental y en el tercer armónico para las frecuencias  $f_0 = 0.9kHz, 1.8kHz$ , no ocurre así para las frecuencias de  $f_0 = 2.7kHz, 4.7kHz$  donde no se pudo observar el fenómeno de resonancia estocástica en el armónico.

Otro punto importante; aunque exista una visible dependencia de la frecuencia de oscilación del sistema con la frecuencia externa, el sistema responde óptimamente siempre al mismo nivel de ruido independientemente del valor de  $f_0$ . Esto es contrario a lo que pasa en los sistemas que no poseen dinámica interna donde el punto óptimo de ruido en el SNR puede cambiar cuando se varía la frecuencia de la señal externa.

### 3.2.2 Resonancia estocástica bajo efectos de la intensidad de amplitud ( $E_0$ )

Los experimentos y análisis de los resultados presentados en el apartado anterior se efectuaron utilizando como condición inicial una amplitud umbral  $E_0^{\max}$  que es la máxima intensidad de amplitud sumada al sistema que no inducirá saltos entre los atractores caóticos. El umbral utilizado fue mostrado en la *fig. 2.9*. En general los estudios de resonancia estocástica consideran



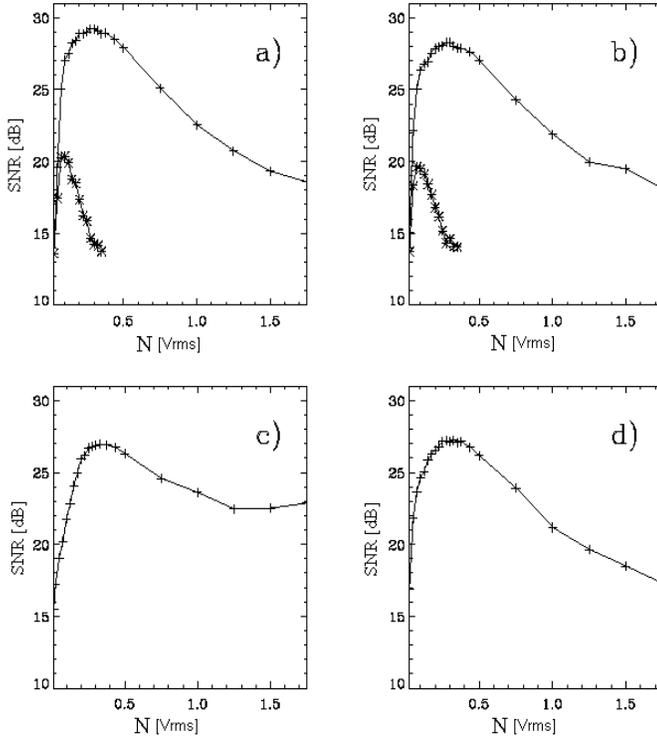
**Fig. 3.7.** Relación señal ruido (SNR) para la frecuencia externa de  $1.8kHz$  y su armónico  $f_a = 5.4kHz$ , la amplitud externa constante es  $E_0^{\max} = 5mV[rms]$  y la resistencia variable del circuito de Chua es  $R = 1.682k\Omega$ .

la influencia del ruido para intensidad de la señal sinusoidal en valores por debajo de un umbral, aunque existen también estudios en los cuales el sistema es estimulado con valores de intensidad externa sintonizada por encima y por debajo de este umbral [34], [35]. En estos experimentos se ha podido mostrar que el ruido aumenta la detectabilidad de la señal cuando su amplitud está por debajo o cercana al umbral, pero el ruido causa el deterioro de la señal en el caso de que esté sintonizada en valores de intensidad por encima del umbral. Ahora es posible confirmar estos resultados en un sistema caótico. Los resultados para diferentes estímulos de la amplitud externa se muestran en la *fig. 3.9*.

En esta figura, las series de respuestas del sistema fueron tomadas a la salida del voltaje  $V_1$  (*fig. 2.1*), bajo el valor fijo de frecuencia  $f_0 = 1.8kHz$ , así,  $f_0/f_{ch} = 0.66$  y de resistencia variable  $R = 1.682k\Omega$ . En cada serie fueron fijados los siguientes valores de amplitud normalizados según  $E_0/E_0^{\max} = 1.333, 1.133, 1.00, 0.583$ . Para cuantificar los resultados se ha escogido utilizar simplemente el factor de amplificación:

$$\eta = \frac{|\hat{\Theta}(f_0)|}{|\hat{\Theta}(f_0)|_{\max}} \quad (3.5)$$

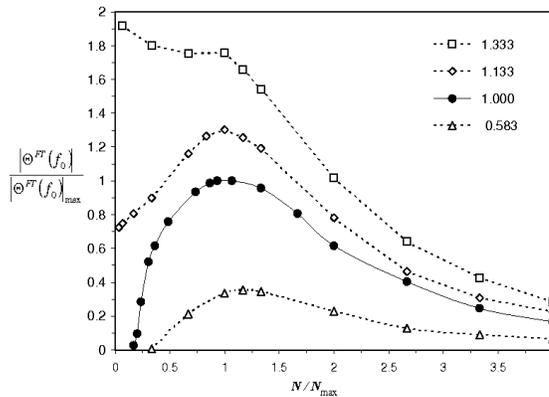
Donde  $\hat{\Theta}(f_0)$  es la transformada de Fourier de la señal digitalizada  $\Theta(f_0)$  (ver *fig. 3.5*),  $|\hat{\Theta}(f_0)|_{\max}$  es el máximo valor que  $|\hat{\Theta}(f_0)|$  asume en el caso  $E_0/E_0^{\max} = 1$ , bajo una intensidad de ruido máxima  $N = N_{\max}$ , también



**Fig. 3.8.** Relación señal ruido(SNR) en función del ruido para diferentes niveles de frecuencia y amplitud: (a)  $f = 0.9kHz, E_0^{\max} = 7mVrms$ ; (b)  $f = 1.8kHz, E_0^{\max} = 5mVrms$ ; (c)  $f = 2.7kHz, E_0^{\max} = 6.4mVrms$ ; (d)  $f = 4.5kHz, E_0^{\max} = 25mVrms$ . En los paneles (a) y (b) se observa resonancia estocástica en el pico fundamental y en sus respectivos armónicos que es representada por la curva que presenta valores de SNR más pequeños. Fue utilizado  $R = 1.682k$

normalizado  $N/N_{\max}$ . Al analizar las series bajo las diferentes amplitudes de la señal externa, se observa claramente que los puntos de máximos no cambian en la escala vertical y son perfectamente identificables, sin que se den cambios considerables del valor óptimo del ruido. Inicialmente sin la presencia de ruido y operando bajo el nivel de amplitud  $E_0/E_0^{\max} = 0.583$  que está por debajo del umbral, el sistema no presenta saltos entre los atractores en un intervalo de tiempo largo, dado que el atractor es bastante estable debido a la baja intensidad de amplitud externa. Una vez que se suma ruido al sistema se obtiene un aumento no muy considerable de la potencia de la señal externa. Para el nivel de amplitud de  $E_0 = E_0^{\max}$  se produce el efecto usual de resonancia estocástica indicado por un claro máximo cercano al valor de ruido  $N^{\max}$ .

Para el caso de  $E_0/E_0^{\max} = 1.133$ , por encima del umbral se observan saltos esporádicos entre los atractores en un corto espacio de tiempo sin la presencia del ruido, que no son suficientes para caracterizar claramente el atractor espiral doble. Bajo esta amplitud el ruido no degrada totalmente la resonancia estocástica caracterizada por un suave máximo. Para el nivel de amplitud  $E_0 = 1.333$  y operando aún el sistema sin la presencia de ruido, el sistema presenta el atractor espiral doble como respuesta a la alta intensidad de la amplitud de la señal externa sinusoidal, ubicada por encima del umbral. En este caso el ruido degrada la potencia de la señal externa caracterizando así un límite de intensidad de amplitud que indica la ausencia del fenómeno resonancia estocástica.

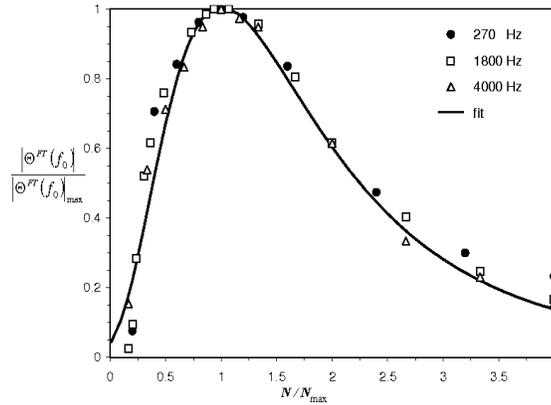


**Fig. 3.9.** Factor de amplificación  $\eta$  en función de la intensidad de ruido normalizado para diferentes niveles de amplitud  $E_0$ , bajo frecuencia constante  $f_0 = 1.8kHz$  y resistencia  $R = 1.682k\Omega$ .

Estos resultados muestran que el comportamiento del sistema tiene una respuesta más coherente cuando, inicialmente sin la presencia de ruido, el nivel de amplitud de la señal externa está sintonizado cerca del valor umbral. Para confirmar este hecho, se han extendido los resultados para las frecuencias adicionales  $f_0 = 0.27kHz$  y  $f_0 = 4.0kHz$ , más alta y más baja que la frecuencia de oscilación interna del sistema  $f_{ch}$  y los resultados fueron cualitativamente similares a los que se mostraron para  $f_0 = 1.8kHz$ . En la *fig.3.10* se muestra la curva de resonancia estocástica de estas frecuencias para  $E = E_0^{\max}$ . Puede observarse que sigue una curva maestra independiente de la frecuencia  $f_0$  de la señal externa y que, bajo el valor  $E_0^{\max}$ , el ruido ejerce cualitativamente igual. Esta curva ha sido ajustada a la siguiente expresión:

$$\eta = x^4 e^{2(1-x^2)}, \quad x = \frac{2}{\frac{N}{N_{\max}} + 1} \tag{3.6}$$

que fue obtenida usando una teoría adiabática [36]. Es importante notar que esta función ha servido para ajustar datos de resonancia estocástica describiendo saltos entre dos atractores estables [37], [38], [39], [40]. De esta manera y como se ve aquí, el ajuste también puede ser utilizado cuando el sistema presenta atractores caóticos.



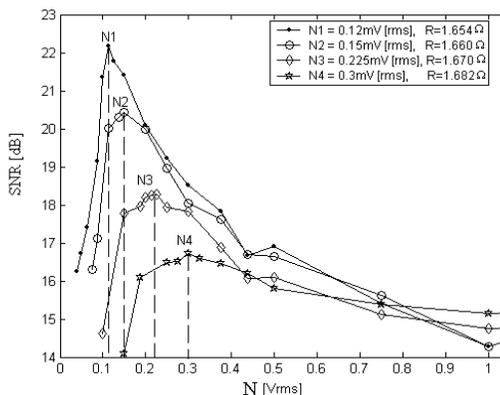
**Fig. 3.10.** Factor de amplificación  $\eta$  en función de la intensidad de ruido normalizado para diferentes valores de frecuencia  $f_0$  escritos en la figura. La curva sólida es el resultado del ajuste a partir de la eq.3.2, resistencia  $R = 1.682k\Omega$ .

También se han detectado resultados similares en otros sistemas que han servido para el estudio de la influencia de la amplitud de la señal sobre la resonancia estocástica utilizando el mismo procedimiento; algunos ejemplos pueden ser encontrados en las referencias citadas en este apartado.

### 3.2.3 Resonancia estocástica bajo efectos de pequeñas variaciones de la resistencia variable

En general la resonancia estocástica se estudia para valores de frecuencia externa mucho más bajos que la frecuencia media del sistema. Por tanto, es de esperar en el sistema de Chua se observe resonancia estocástica para un valor bajo de frecuencia, como por ejemplo  $f_0 = 30Hz$ . Para esta frecuencia, se utilizó una amplitud  $E_0 = 35.36mV[rms]$ . Para este valor no se detectan saltos entre los atractores caóticos sin la presencia del ruido y no se observa modulación efectiva en la salida de la señal. Se analizó la resonancia estocástica

para los siguientes valores de resistencia variable del circuito de Chua  $R = 1.654k\Omega, 1.660k\Omega, 1.670k\Omega, 1.682k\Omega$ .



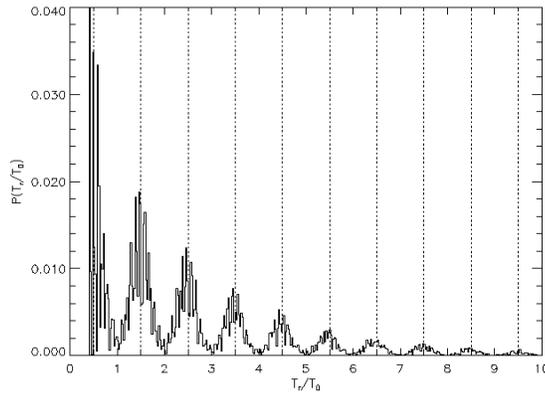
**Fig. 3.11.** Relación señal ruido en función del ruido, para frecuencia externa  $f_0 = 30Hz$  y amplitud  $E_0 = 35.36mV[rms]$ . Cada serie presenta un máximo de ruido  $N$ , relacionado con los valores de la resistencia variable  $R$ .

El resultado se muestra en la *fig. 3.11*, donde se advierte el desplazamiento de los máximos en la SNR designados por las letras  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$ , que indican la influencia de la variación de la resistencia  $R$  del circuito de Chua. Resulta interesante observar que los valores utilizados se encuentran en el intervalo  $1.65k\Omega < R < 1.7k\Omega$  que fueron mencionados en el capítulo anterior (*figs. 2.5, 2.7*) y que llevan la órbita interna del atractor caótico a su punto de mayor inestabilidad ( $1.65k\Omega$ ) o lo aleja hacia el punto más estable ( $1.7k\Omega$ ) sin la posibilidad de observar el atractor espiral doble. Por lo tanto estos experimentos muestran que máximos en la SNR dependen del valor de resistencia del circuito de Chua. Se observa también que cuando  $R = 1.682k\Omega$  la SNR, coincide con el máximo de la SNR mostrado en las figuras anteriores, lo que nuevamente confirma que los máximos no dependen de la frecuencia de la señal externa.

La ventaja de este resultado es la localización anticipada del ruido óptimo, que se consigue relacionando los valores de  $N$  con los valores de  $R$ . Desde un punto de vista experimental, si uno quiere hacer una demostración rápida de la optimización del sistema, esta relación puede ahorrar tiempo en el momento de identificar los niveles de ruido óptimos y puede explicar algunas de las variaciones de resultados experimentales directamente conectados al error del valor de la resistencia.

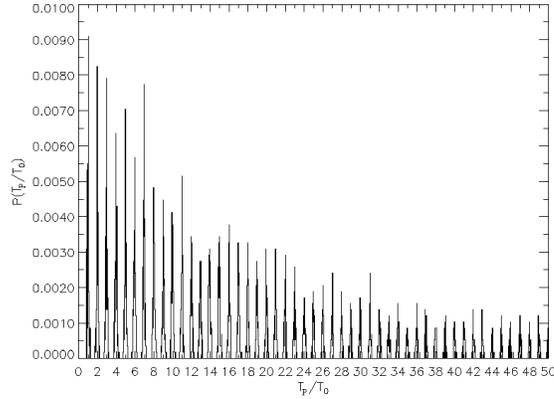
### 3.2.4 Análisis en el tiempo

Una forma alternativa de caracterizar la resonancia estocástica es usar la distribución del tiempo de residencia  $t_r$  y de pulso  $t_p$ . Como ya se ha dicho en su definición, ambos tiempos pueden obtenerse fácilmente desde la señal digitalizada de salida  $\theta(t)$  (*fig.* 3.5). En todos los experimentos de esta sección se ha considerado la intensidad de amplitud cercana al umbral  $E_0 = E_0^{\max}$ .



**Fig. 3.12.** Distribución de probabilidad  $P(t_r/t_0)$  del tiempo de residencia  $t_r$  para  $f_0 = 270Hz$  y  $N = 0.3125V[rms]$ .  $T_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025.

El tiempo  $t_r$  se define como el tiempo que el sistema permanece en un estado, el atractor espiral simple en este caso, y ha sido usado para determinar resonancia estocástica en sistemas caóticos [24], [31], [37], [38]. En la *fig.* 3.12 se muestra la distribución de probabilidad  $P(t_r/t_0)$  versus el tiempo de residencia normalizado  $t_r/t_0$ ,  $t_0 = 1/f_0$ . Se ha considerado la frecuencia  $f_0 = 270Hz$  de la señal sinusoidal de entrada y la intensidad óptima de ruido  $N \approx 0.3V [rms]$ . Como puede verse en esta figura, la distribución de probabilidad consiste en un conjunto de picos modulados, que se encuentran localizados en múltiplos enteros de  $t_0/2$ . Cuando se comparan los resultados con el tiempo característico de oscilación del sistema  $t_{ch} = 1/f_{ch}$  éste es aproximadamente igual a la media de duración de una rotación de la trayectoria dinámica del atractor caótico espiral simple. El envolvente de la modulación tiene un máximo  $t_r/t_0 = 1/2$  y decae exponencialmente para tiempos más largos. La estructura de la distribución de probabilidades del tiempo residente  $t_r$  ha sido también obtenida analíticamente para sistemas biestables estándares [31], y son similares a los obtenidos aquí.



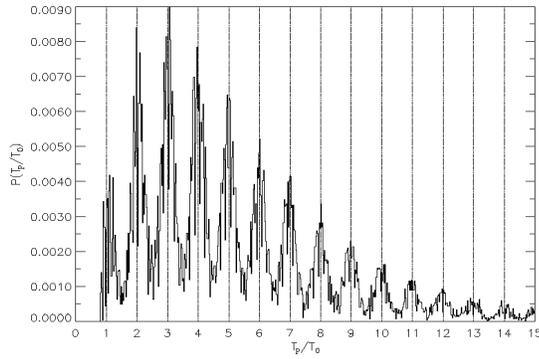
**Fig. 3.13.** Distribución de probabilidad  $P(t_p/t_0)$  del tiempo de pulso  $t_p$  para  $f_0 = 270Hz$ ,  $N = 62.5mV [rms]$  (panel superior).  $t_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025.

El tiempo de pulso  $t_p$  es el tiempo entre dos consecutivas transiciones de estado, o en otras palabras, la suma de dos tiempos de residencia consecutivos  $t_r$  en diferentes atractores. La distribución de probabilidad del tiempo de pulso se aplica normalmente en el caso de fenómenos de resonancia estocástica en sistemas biológicos, y corresponde a un histograma de tiempo real adquirido a través de neuronas sensoriales forzadas periódicamente [41], [42], [43]. En las *fig.*(3.13 – 3.15) se muestra la distribución de probabilidades temporales obtenida de los experimentos en el circuito de Chua con frecuencia de la señal de entrada igual a  $f_0 = 270Hz$  bajo tres diferentes valores de ruido.

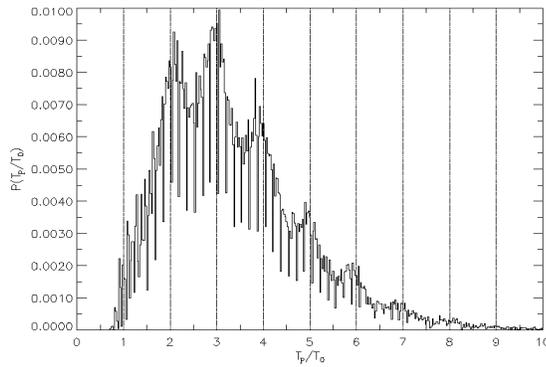
Para intensidades de ruido relativamente bajas (*fig.* 3.13), la estructura de  $P(t_p/t_0)$  consiste en picos muy estrechos localizados en múltiplos del periodo  $t_0$  de la señal de entrada. Esto indica que los saltos entre las trayectorias dinámicas de los atractores están sincronizadas con la señal de entrada. La envolvente de la distribución tiene un máximo en  $t_p = t_0$  y decae para tiempos más largos. En esta distribución, los picos se extienden a tiempos cuyos puntos para  $P(t_p/t_0)$  son muy irregulares.

Para un nivel de ruido cercano al óptimo,  $N \approx N^{\max}$  (*fig.* 3.14) la distribución de probabilidad posee una estructura doble, puesto que la distribución se encuentra formada por picos y la envolvente presentando un máximo en  $t_p = 3t_0$ .

Para el caso en que el nivel de ruido es muy alto, la distribución consiste en algunos picos superpuestos (*fig.* 3.15), que indican que las trayectorias entre los atractores caóticos son bastante independientes de la magnitud de la



**Fig. 3.14.** Distribución de probabilidad  $P(t_p/t_0)$  del tiempo de pulso  $t_p$  para  $f_0 = 270Hz$  y  $N = 312.5mV[rms]$ .  $t_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025.



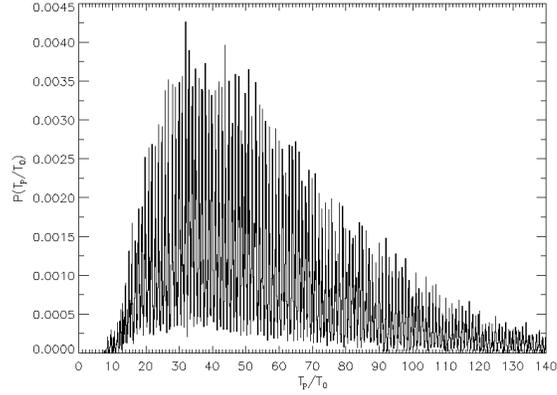
**Fig. 3.15.** Distribución de probabilidad  $P(t_p/t_0)$  del tiempo de pulso  $t_p$  para  $f_0 = 270Hz$  y  $N = 750.mV[rms]$ .  $t_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025.

señal externa, y que la intensidad del ruido domina la dinámica de la salida del sistema.

Finalmente, para valores de  $N$  mucho más altos, el ruido domina la dinámica, y los picos en la distribución de tiempos de pulsos desaparecen.

Los mismos procedimientos se pueden hacer para diferentes frecuencias a fin de verificar su influencia en el sistema caótico. En las *fig.3.16* y *3.17* se muestra la distribución de probabilidad para la frecuencia de la señal de entrada cercano (*fig. 3.16*) a la frecuencia media de oscilación  $f_{ch}$  y mayor que esta

(*fig. 3.17*). Puede verse que las estructuras de múltiplos de la distribución de probabilidades y las del máximo de la envolvente de modulación se preserva.



**Fig. 3.16.** Distribución de probabilidad  $P(T_p/T_0)$  del tiempo de pulso  $T_p$  para  $f_0 = 2.728kHz$  y  $N = 312.5mV[rms]$ .  $T_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025.

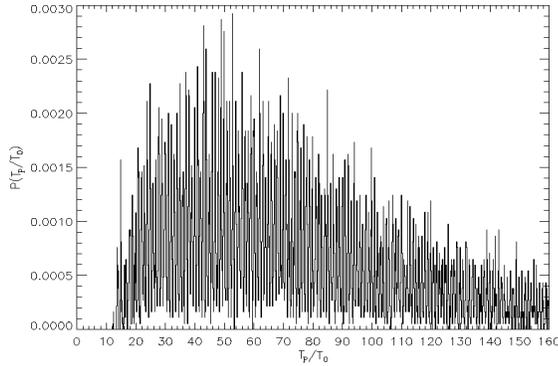
En el estudio experimental y numérico de resonancia estocástica ha sido dedicada una atención especial a la dependencia de la frecuencia de pulso entre los diferentes estados de un sistema caótico bajo efectos del ruido, [24], [31], [44]. Como ya se vió con anterioridad, la frecuencia media de pulso para un forzamiento débil decrece exponencialmente con la intensidad de ruido [44], y lo mismo se verifica aquí.

La *fig. 3.18* muestra este decaimiento exponencial del tiempo medio de pulso  $\langle t_p \rangle / t_{ch}$  para valores utilizados en los experimentos con el circuito de Chua. Esta curva puede ser aproximada por una ley exponencial:

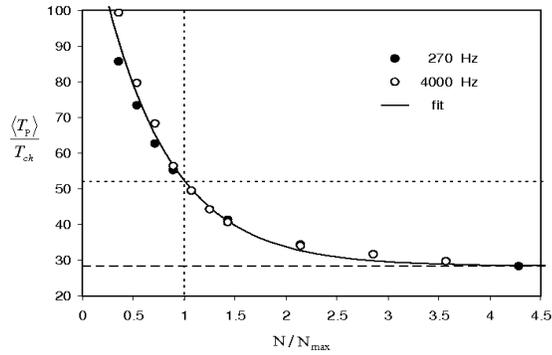
$$\frac{\langle t_p \rangle}{t_{ch}} = C + A \exp\left(-B \frac{N}{N_{\max}}\right), \quad (3.7)$$

donde  $N_{\max}$  es la intensidad de ruido óptima y las constantes  $A = 107.3$ ,  $B = 1.5$  y  $C = 28.4$  son independientes de la frecuencia  $f_0$  de la señal de entrada.

Para finalizar, se considera la envolvente excluyendo los picos de resonancia de la función de distribución de probabilidades de los tiempos de pulso. Numéricamente se ha obtenido este envolvente a través de los datos para  $t_p$  en puntos  $[(i - 1/2)t_0, (i + 1/2)t_0]$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . El histograma correspondiente se muestra



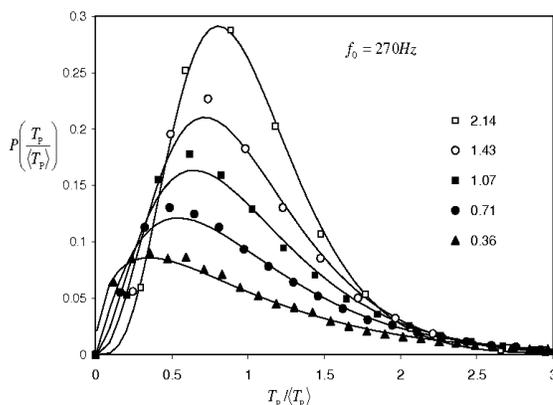
**Fig. 3.17.** Distribución de probabilidad  $P(T_r/T_p)$  del tiempo de pulso  $T_p$  para  $f_0 = 4.0kHz$  y  $N = 312.5mV[rms]$ .  $T_0 = 1/f_0$  es el periodo de la señal, el bin usado ha sido de 0.025.



**Fig. 3.18.** El tiempo medio de pulso versus la intensidad de ruido normalizados bajo señal periodica  $f_0 = 270Hz$  y  $4.0kHz$ . En la figura  $T_{ch} = 1/f_{ch}$ . El resultado representado por curva sólida ha sido ajustado a través de la eq.3.7.

en la *fig.*(3.19 – 3.20) en términos de la variable normalizada  $t_p / \langle t_p \rangle$ , para la frecuencia  $f_0 = 270Hz$  (*fig.* 3.19) y  $f_0 = 4000Hz$  (*fig.* 3.20) de la señal sinusoidal de entrada y varios valores de la intensidad de ruido, por debajo y por encima del valor óptimo de ruido  $N_{max}$ . Los resultados experimentales fueron ajustados a una distribución gamma:

$$P(t_p) = \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} (t_p + m)^{\alpha - 1} \exp\left[-\frac{t_p + m}{\beta}\right] \quad (3.8)$$



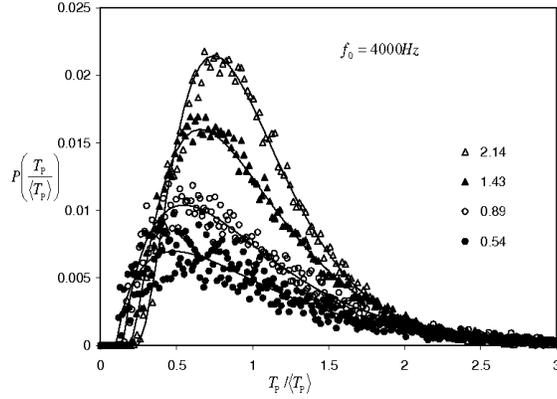
**Fig. 3.19.** Distribución de probabilidad del tiempo medio de pulso  $P(t_p / \langle t_p \rangle)$ ,  $f_0 = 270\text{Hz}$ . Las intensidades de ruido óptimas son dadas en la figura. La curva sólida ha sido ajustada a través de la eq.3.8.

Donde  $m$  y  $\alpha > 0$  son los parámetros de localización y forma respectivamente,  $\Gamma(\alpha)$  es la función gamma y  $\beta > 0$  es el parámetro escalar. Así, por definición se utiliza  $\langle t_p \rangle = 1$  que implica  $\beta = (1 + m) / \alpha$  dejando  $\alpha$  y  $m$  como parámetros para ajustar los datos. Una forma conveniente para el ajuste es calcular la desviación estándar del tiempo de pulso  $\sigma_s$  y usar  $\alpha = (1 + m)^2 / (\sigma_s / \langle t_p \rangle)$  asumiendo que  $m$  es un parámetro libre.

Para la frecuencia  $f_0 = 4\text{kHz}$  y para los valores de  $N/N_{\max} \approx 0.36, 0.71, 1.07, 1.43, 2.14$ , los valores correspondientes de  $\alpha \approx 1.54, 2.18, 2.80, 3.52, 5.13$ , donde  $m = 0$ . Para la frecuencia de  $f_0 = 4\text{kHz}$ ,  $N/N_{\max} \approx 0.54, 0.89, 1.43, 2.14$ , con los correspondientes valores de  $\alpha \approx 1.75, 1.88, 2.32, 2.97$  y los valores de  $m$  son aproximadamente  $-0.103, -0.146, -0.202, -0.242$ .

Como se ve representado en las figuras, el ajuste es bastante bueno para todos los valores de la intensidad de ruido y para las frecuencias consideradas, la distribución gamma dada a través de la eq. 3.8 describe bien la distribución de probabilidad experimental del tiempo de pulso.

En aplicaciones de resonancia estocástica es importante escoger una intensidad de ruido  $N$  cercana a sus valores óptimos  $N_{\max}$  con la cual el factor de amplificación  $\eta$  toma el máximo valor. Ya que el valor  $\eta$  no es fácilmente medible en muchas situaciones, hay que confiar en los cálculos de  $N_{\max}$  utilizando otros métodos. Han sido propuestos métodos alternativos con el fin de obtener la intensidad de ruido óptimo desde la distribución de probabilidades del tiempo de residencia y de pulso [28], [41], [45], [46]. Sin embargo las intensi-



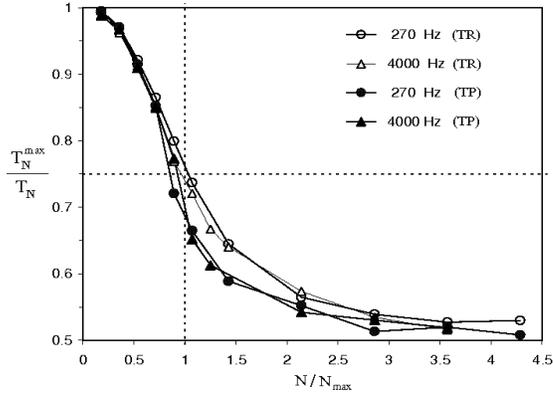
**Fig. 3.20.** Distribución de probabilidad del tiempo medio de pulso  $P(t_p / \langle t_p \rangle)$ ,  $f_0 = 4.0kHz$ . Las intensidades de ruido óptimas son dadas en la figura. La curva sólida ha sido ajustada a través de la eq.3.8.

dades óptimas de ruido determinadas a través de este método no coincide con  $N_{\max}$  cuando están determinados desde  $\eta$ .

La forma de la distribución de probabilidades del tiempo de residencia y de pulso que se ha obtenido para resonancia estocástica en el sistema caótico de Chua para diferentes valores de intensidad de ruido ( *figs.* 3.13, 3.14 y 3.15), sugieren un método para determinar la intensidad del ruido óptimo desde estas distribuciones. El método es similar al propuesto en la referencia [41], que puede ser aplicado a ambos tiempos de residencia y de pulso y obtener como resultado la intensidad de ruido óptimo que coincide con  $N_{\max}$  como ha sido determinado desde  $\eta$ . El método es el siguiente:

Se cuenta  $t_N^{\max}$  como el número de tiempos de residencia en todos los intervalos  $[t_i - t_0/4, t_i + t_0/4]$ , siendo  $t_i = (i - 1/2)t_0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , que es la localización de la máxima distribución de probabilidades. En este caso los tiempos de residencia considerados son definidos como  $t_i = it_0$ . El tiempo de residencia total es  $t_N$ . La dependencia de la proporción  $t_N^{\max}/t_N$  sobre la desviación estándar normalizada  $N/N_{\max}$  es mostrada en la *fig.* 3.21 para dos frecuencias de la señal periódica de entrada.

Para intensidades de ruido  $t_N^{\max}/t_N \approx 1$  los tiempos de pulso  $t_p$  y de residencia  $t_r$  están muy concentrados cerca de los valores  $t_i$ . Para intensidades de ruido de la proporción  $t_N^{\max}/t_N \approx 0.5$  los tiempos  $t_p$  y  $t_r$  están siempre distribuidos uniformemente. Bajo el nivel óptimo de ruido  $t_N^{\max}/t_N$  correspondiente al máximo factor de amplificación  $t_N$  de la cantidad  $t_N^{\max}/t_N$  los tiempos de residencia y de pulso muestran un punto de inflexión. De esta manera, se



**Fig. 3.21.** Dependencia de la proporción  $t_N^{\max}/t_N$  para tiempo de residencia ( $t_r$ ) y de pulso ( $t_p$ ) versus la intensidad de ruido normalizado bajo señal periódica de entrada con frecuencia  $270\text{Hz}$  y  $4.0\text{kHz}$ .  $t_{ch} = 1/f_{ch}$  e intensidad de ruido óptima. El resultado representado por la curva sólida ha sido ajustado a través de la ecuación 4 dada en el texto.

propone que se puede definir la intensidad óptima como el valor  $N$  en el punto de inflexión.

Sería interesante aplicar este método propuesto para determinar la intensidad óptima de ruido desde la distribución de probabilidad del tiempo de  $t_r$  y  $t_p$  obtenidos en otros experimentos sobre resonancia estocástica y comparar sus intensidades con las intensidades óptimas de ruido determinados desde el factor de amplificación  $\eta$ .

### 3.2.5 Resumen

En este capítulo se ha estudiado experimentalmente el fenómeno de resonancia estocástica en un circuito electrónico de Chua operando en el régimen caótico forzado por una señal sinusoidal externa y ruido blanco gaussiano.

En el apartado 3.2.1 se ha estudiado la amplificación de señales deterministas considerando un determinado umbral dependiente de la señal externa. La curva de estos valores umbrales presenta un mínimo para frecuencias del mismo orden de magnitud que la frecuencia interna del sistema  $f_{ch}$ . La curva decrece y luego crece rápidamente para frecuencias más altas y desarrolla picos en ciertos valores.

En el apartado 3.2.1 se ha estudiado la resonancia estocástica bajo los efectos de la amplitud señal. Se ha observado que el ruido mejora la respuesta del sistema para valores cercanos o por debajo del umbral, y que para valores

por encima del mismo el ruido degrada la respuesta del sistema; en particular, después de normalizaciones adecuadas, se ha observado que la dependencia de amplificación es la misma para todas las frecuencias de la señal externa, y que puede ser bien descrita a partir de la teoría adiabática.

En el apartado 3.2.3 se ha estudiado la resonancia estocástica bajo los efectos de cambios del sistema, representada por la resistencia interna  $R$ , y se ha mostrado que el valor óptimo de ruido cambia de acuerdo con los cambios de esta resistencia  $R$ .

En el apartado 3.2.4 se ha analizado la resonancia estocástica a partir de los histogramas de tiempos, se ha mostrado que:

- La distribución de probabilidad para el tiempo de residencia  $t_r$  aparece en múltiplos pares de la mitad del periodo de la señal sinusoidal de entrada.
- La distribución de probabilidad del tiempo de pulso  $t_p$  aparece en múltiplos de la señal periódica.
- La modulación en la distribución de probabilidades para  $t_p$  puede ser descrita a partir de la distribución gamma con parámetro de forma que crece con la intensidad de ruido.
- El tiempo de pulsos decae exponencialmente con la intensidad de ruido para amplitudes de la señal externa posicionadas por debajo del umbral para todas las frecuencias de la señal externa.
- Se ha mostrado que la intensidad del ruido óptima correspondiente a un punto de inflexión en el estudio de la dependencia del ruido, es proporcional al número de residencia o al tiempo de pulso cercano a los picos de su propia distribución de probabilidades y al número total de estos tiempos.

### 3.3 Una posible aplicación: “resonancia fantasma”

Un problema surgido en Alemania en el siglo XIX, trajo consigo la intensa polémica sobre cuál sería la verdadera explicación para un fenómeno que más tarde sería conocido como la “percepción de la fundamental ausente”. Ese debate empezó entre los científicos A. Seebeck [47] y el famoso G.S.Ohm [48]. Seebeck había estudiado el problema de manera original y con sus resultados había desafiado la teoría vigente de la primera mitad del siglo XIX, que era justamente la ley acústica de Ohm. Una de las consecuencias de esta ley es que para oír una determinada altura de un tono cualquiera es obligatoria la correspondencia uno a uno entre los tonos percibidos por el oído y los tonos encontrados en el espectro físico del estímulo sonoro; Seebeck observó, a través de dispositivos generadores de sonidos, que no eran las frecuencias las que se oían y sí la estructura de periodicidad de la señal.

Veinte años más tarde, H. Von Helmholtz [49] reencendió la controversia sobre el origen de la altura y defendió la teoría espectral inaugurando una línea de argumentaciones que atribuye ciertos fenómenos, todavía no muy bien comprendidos, a la distorsión no lineal del oído. De hecho, existen fenómenos que son producidos por cuenta del propio mecanismo de la audición que surgen a consecuencia de estímulos espectrales fuertes. Basado en este argumento Helmholtz también afirmó que solamente aquellos que no conocían el funcionamiento de los sentidos podrían estar de acuerdo con las opiniones de Seebeck [47], [50], [51], [52], hasta que L. Helmann entró en escena en 1912 y mostró, a base de experimentos, que la fundamental está ausente en la mayoría de las vocales emitidas y a pesar de ello se percibe la altura del tono de la vocal. De esta forma se hizo partidario de Seebeck.

Después de otros descubrimientos y controversias, apareció el holandés J. F. Schouten que desarrolló entre 1938 y 1940 la teoría del residuo [53]. Para Schouten, los componentes inferiores de una señal compleja podían ser percibidos individualmente, todos ellos presentando alturas casi iguales a los que presentaban cuando sonaban separadamente. En cuanto a los componentes superiores, no eran percibidos aisladamente, pero sí de modo colectivo como fundidos en un único componente al que llamó "residuo", y cuya altura se determinaba por el periodo de la forma global de la onda, que a su vez era igual al periodo del tono fundamental. Una de las principales características observadas en los trabajos de Schouten es que los residuos no aparecen en la transformada de Fourier, contrariando así la teoría de Ohm. En realidad, en la década de los 40 la literatura no registró nada más significativo que los resultados de Schouten. Este problema llegó a los cien años de existencia en torno a la segunda guerra mundial. En las décadas siguientes (1940-1970) Holanda se convirtió en puntera en este tipo de investigación que siempre tenía como foco la "fundamental ausente".

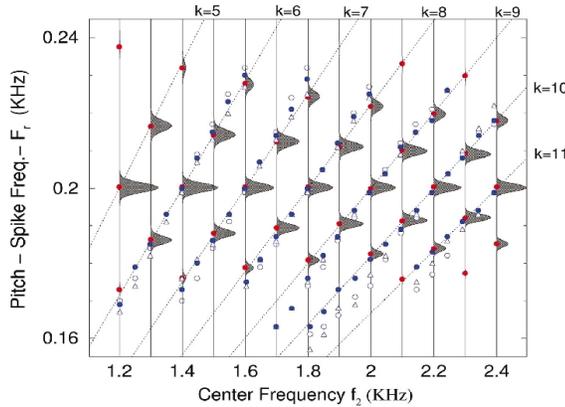
En las últimas décadas han surgido otros nombres y modelos acerca de este problema que todavía es actual. Basándose en el trabajo de Schouten, en 2003 Dante Chiavo y colaboradores, utilizaron el fenómeno de resonancia estocástica para mostrar que una cantidad de ruido actúa en el oído humano [54], mejora la percepción y detecta la fundamental ausente. Chialvo y colaboradores consideraron en un modelo de neuronas una variación del caso de tonos inarmónicos utilizados en los experimentos de Schouten [50], donde los tonos complejos son construidos sumando tonos puros de frecuencias:

$$F(t) = A[\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \dots + \sin(2\pi f_n t)]. \quad (3.9)$$

En esta ecuación  $f_1 = kf_0 + \Delta f, f_2 = (k+1)f_0 + \Delta f, \dots f_n = (k+n-1)f_0 + \Delta f$ , son componentes de frecuencia externa al sistema. Añadiendo ruido al modelo la resonancia o residuo se pudo observar en puntos que obedecen la ecuación:

$$fr = f_0 + \Delta f / (k + (n - 1)/2), \tag{3.10}$$

donde  $fr$  ha quedado conocida como frecuencia fantasma (en inglés "Ghost Frequency"),  $n = 1, 2, 3 \dots$  y  $k > 1$  son enteros. En el experimento de Shouten tres individuos escuchaban un sonido compuesto por tres tonos puros de frecuencias  $(m/2) \sin[2\pi (f - g) t] + \sin(2\pi ft) + (m/2) \sin[2\pi (f + g) t]$ , (aquí  $m$  es un parámetro definido como profundidad de modulación [50]), y sus resultados junto con los obtenidos por Dante Chialvo y colaboradores están ejemplificados en la figura *fig.3.22*



**Fig. 3.22.** En el experimento de Shouten tres individuos escuchaban un sonido compuesto por tres tonos puros de frecuencias. Las campanas grises indican la probabilidad con que la neurona de Chialvo se excita.

Los círculos y triángulos representan las respuestas de los tres individuos ante los sonidos expuestos. Las campanas indican la probabilidad con que las neuronas se exciten a una frecuencia dada y los puntos rojos son los máximos de esta probabilidad; se puede observar que son bastante similares.

El interés en esta parte del trabajo es estudiar este fenómeno utilizando el circuito electrónico de Chua operando en el régimen caótico. Este estudio puede ser relevante en lo referente a análisis relacionados con la interacción de señales sinusoidales, señales estocásticas, sincronización, control y quizás otras fenomenologías no lineales que ocurren en estos sistemas.

El circuito electrónico de Chua así como sus parámetros experimentales han sido descritos y estudiados en los capítulos anteriores. Este sistema contiene los ingredientes necesarios para el estudio de la resonancia fantasma bajo el punto de vista de D. Chialvo y colaboradores [30], [54]. El otro punto tratado aquí, se basa en el argumento de que desde los experimentos de Seebeck, esta fenomenología ha sido observada sin que necesariamente la causa fuera un ruido evidente en el sistema; esto abre una posibilidad de observar este fenómeno utilizando la no linealidad del sistema. Así, el siguiente punto está dividido en dos etapas: en la primera se estudia la posibilidad de la observación del fenómeno en el sistema caótico de Chua, bajo un forzamiento sinusoidal pero sin la presencia del ruido externo. En la segunda etapa se analiza el fenómeno activado por el ruido externo considerando el fenómeno de resonancia estocástica.

### 3.3.1 Interacción sin ruido

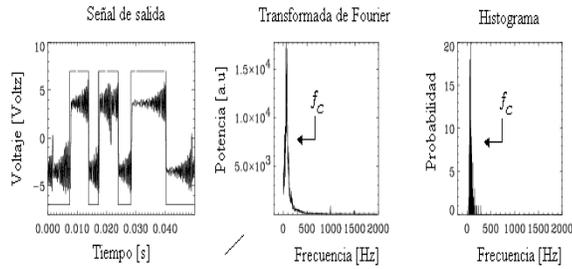
El fenómeno "resonancia fantasma" ha sido observado en sistemas como láseres [56], circuitos electrónicos (Fitz Hugh - Nagumo) [57] y en modelos matemáticos [58]. En estos sistemas la metodología utilizada para observar los tonos que aparecen a la frecuencia de resonancia  $f_r$  se basa en la metodología utilizada por Schouten, el cual utilizó como indicadores los histogramas de tiempos, entre otros métodos estadísticos.

El estudio de la interacción de combinaciones de señales utilizadas como forzamiento en el sistema Chua operando en el régimen caótico, ha sido sólo brevemente estudiado [18]. De esta forma es importante conocer qué tipo de respuesta o forma será observada en los histogramas de las series de salidas del circuito de Chua. Este será por lo tanto el punto de partida; para ello, se estudiará el sistema forzado únicamente por la señal externa  $F(t)$  definida por la *eq.3.9*. Puede observarse que según este procedimiento se pretende mostrar que es posible verificar el fenómeno sin la presencia de ruido externo.

Se considera el siguiente experimento utilizando los valores:  $f_0 = 500Hz$ ,  $\Delta f = 0$ ,  $k = 2$ ,  $n = 2$ , por lo tanto según *eq.3.9*, las frecuencias serán  $f_1 = 1kHz$ ,  $f_2 = 1.5kHz$  y se puede escribir

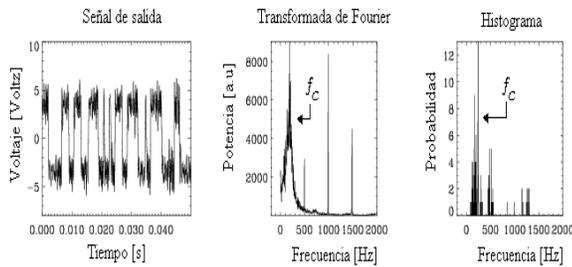
$$E(t) = E_0 [\sin(2\pi 1000t) + \sin(2\pi 1500t)]. \quad (3.11)$$

El experimento consiste en variar la intensidad de amplitud  $E_0 = 75mV$ ,  $250mV$ ,  $500mV$ . Los resultados pueden verse en las *figs.* (3.23 – 3.25) que muestran las series de las señales de salidas del circuito de Chua adquiridas en el punto de salida  $V_1$  bajo los diferentes niveles de amplitud, así como sus transformadas de Fourier y sus respectivos histogramas de frecuencias. Los



**Fig. 3.23.** Series de la señal de salida  $V_1$  del circuito de Chua, bajo el nivel de amplitud  $E = 75mV$ , de la señal  $E(t)$  (primer panel) y sus respectivas transformadas de Fourier e histograma de frecuencia

histogramas de frecuencias de pulso  $f_p$  fueron obtenidos a partir de la señal digitalizada coleccionando la suma de los sucesivos tiempos de residencia  $t_r$  ;  $t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{r(2j)}, t_{r(2j+1)}$ , siendo por lo tanto, el tiempo de pulso definido como  $t_p = (t_{r(2j)} + t_{r(2j+1)})$ ; consecuentemente la frecuencia de pulso será  $f_p = 1/t_{pj}$  , donde  $j = 0, 1, \dots$  es un número entero. Se han normalizado los histogramas utilizando el número total de puntos de frecuencia de pulso  $f_n = 1/t_n$  con  $n = 10.000$  puntos.



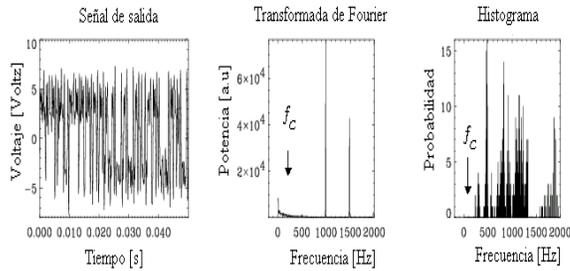
**Fig. 3.24.** Series de la señal de salida  $V_1$  del circuito de Chua, bajo el nivel de amplitud  $E = 250mV$ , de la señal  $E(t)$  (primer panel) y sus respectivas transformadas de Fourier e histograma de frecuencia

Como se puede observar en la *fig. 3.23*, el sistema operando bajo intensidad de amplitud  $E_0 = 75mV$  realiza transiciones entre los dos atractores que caracterizan el atractor espiral doble. Aunque el sistema se encuentre forzado, la frecuencia de saltos entre los puntos fijos (señalada en la transformada de Fourier e histograma por  $f_c$ ) es mucho más pequeña que el resultado esperado

por la *eq.3.10*, siendo bastante probable que  $f_c$  sea la frecuencia respuesta en que domina la dinámica interna del sistema, hecho que será asumido aquí.

Variando el valor de la intensidad de amplitud para  $E_0 = 200mV$  (*fig. 3.24*) se identifica a través de la transformada de Fourier la frecuencia para  $\Delta f = 0Hz$ , o sea  $fr_{(\Delta f=0)} = 500Hz$  predicha por la *eq. 3.10*. También se detecta que la intensidad de  $f_c$  disminuye, confirmando así el aumento de la contribución de la señal externa a las transiciones entre los atractores caóticos.

Aumentando más aún el valor de amplitud, para  $E_0 = 500mV$  (*fig. 3.25*), se advierte que la contribución de la frecuencia  $f_c$  es casi inexistente, indicando que la señal externa domina considerablemente las transiciones entre los atractores caóticos, no permitiendo la aparición de frecuencias más pequeñas. Pero la oscilación interna del sistema contribuye y se caracteriza por la aparición de frecuencias más altas atípicas, que manifiestan la tendencia de seguir los componentes de la señal sinusoidal externa, y que pueden ser observadas en los histogramas a través de frecuencias más altas que  $fr_{(\Delta f=0)} = 500Hz$ . Debe recordarse que la aparición del armónico  $fr_{(\Delta f=0)} = 500Hz$  en la transformada de Fourier es perfectamente normal y está de acuerdo con las teorías generales de interacción de sistemas no lineales con una suma de la señal sinusoidal. Pero para  $\Delta f \neq 0$  aunque la estructura, frecuencia principal y armónico pueden ser observadas en la transformada de Fourier, no lo será la frecuencia fantasma.



**Fig. 3.25.** Series de la señal de salida  $V_1$  del circuito de Chua, bajo el nivel de amplitud  $E = 500mV$ , de la señal  $E(t)$  (primer panel) y sus respectivas transformadas de Fourier e histograma de frecuencia

Considerando el objetivo del apartado se pueden resumir las principales observaciones en los siguientes puntos principales: se necesita un nivel suficientemente alto de la amplitud  $E_0$  para que pueda ser observada en el sistema de Chua la frecuencia fantasma  $fr$  a través de los histogramas de frecuencias de pulso  $f_p$ . El otro punto no es tan obvio, y está relacionado con la distribución de potencia observada en la respuesta del sistema y con el valor de los com-

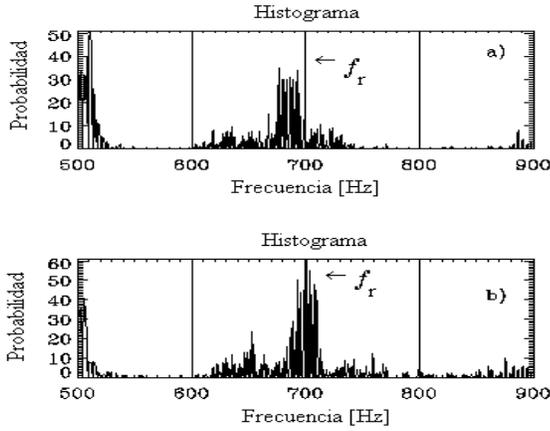


Fig. 3.26. Histogramas de frecuencias.

ponentes de frecuencia de la señal externa. En la transformada de Fourier en la *fig.3.23*, se ve en que el pico de potencia del componente de la señal sinusoidal externa de frecuencia  $1.0kHz$  es mayor que el componente de frecuencia  $1.5kHz$ . Esto puede indicar que la primer componente contribuirá más a la respuesta de sistema. En cambio, se puede verificar fácilmente que la frecuencia de valor  $1.5kHz$  necesita una amplitud menor para imponer su dinámica y hacer que el atractor oscile entre sus puntos fijos inestables a esa frecuencia. Para aclarar la importancia de este hecho, se discutirá el problema a partir de un segundo experimento.

Se consideran los siguientes parámetros experimentales:  $f_0 = 500Hz$ ,  $\Delta f = 500$ ,  $k = 2$ ,  $n = 2$  (aquí ya se utiliza  $\Delta f \neq 0$ ), por lo tanto según la *eq.3.9* los componentes de frecuencia de la señal sinusoidal externa son:  $f_1 = 1.5kHz$ ,  $f_2 = 2.0kHz$  y se puede escribir  $E(t) = E_0 * [\sin(2\pi 1500t) + \sin(2\pi 2000t)]$ . Los niveles de amplitud considerados son  $E_0 = 300mV, 360mV$ , los resultados pueden observarse en la *fig. 3.26(a - b)*,

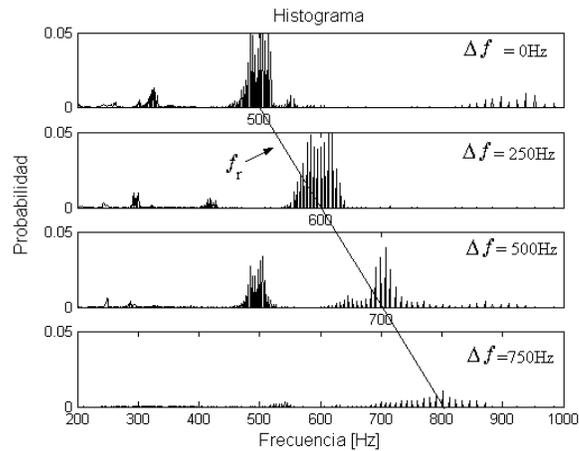
Destaca en la *fig. 3.26a*) que el pico aparece desplazado del punto esperado para  $f_r$ , que según una rápida inspección en la *eq.3.10* es de  $700Hz$ , este desplazamiento probablemente se debe a que la componente de frecuencia de  $2000Hz$  está siendo beneficiada por el sistema a través de una posible resonancia interna. Una característica de este hecho es la necesidad de un valor menor de amplitud para provocar saltos entre los atractores caóticos. Con relación a la verificación del fenómeno de frecuencia fantasma (Ver *fig. 3.26(a - b)*), esta resonancia puede ser la causa por la cual, la respuesta no se ajuste a los valores esperados  $f_r$ .

Se observa experimentalmente que es posible solucionar este problema a partir del control de la intensidad de esta componente:

$$E(t) = E_0 [\sin(2\pi 1500t) + m \sin(2\pi 2000t)], \quad (3.12)$$

el parámetro  $m$  disminuye la interacción entre el sistema y la componente de la señal sinusoidal. En este caso  $m$  también puede ser entendido como el parámetro que controla la profundidad de la modulación, que ha sido usado por Schouten. El resultado está representado en la *fig. 3.26b*) para el valor de  $m = 0.5$ , puede verse que el pico está más centrado en la probabilidad esperada  $fr = 750Hz$ .

En base a estas observaciones se presenta un primer resultado utilizando la función para la cual la respuesta del sistema es observada en puntos que obedecen a la *eq. 3.10*. Tomando  $E(t) = E_0 [\sin(2\pi f_1 t) + 0.5 \sin(2\pi f_2 t)]$ ,  $f_0 = 500Hz$ ,  $k = 2$ ,  $n = 2$ ,  $f_1 = 2f_0 + \Delta f$ ,  $f_2 = 3f_0 + \Delta f$  y utilizando los siguientes valores para el desplazamiento de frecuencia  $\Delta f = 0Hz, 250Hz, 500Hz, 750Hz$ . Los resultados experimentales pueden verse en la *fig.3.27*.



**Fig. 3.27.** Histograma obtenido a través de las series de las señales de salidas del circuito de Chua que muestran los puntos de frecuencia fantasma  $fr = 500Hz, 600Hz, 700Hz, 800Hz$

La *fig.3.27* indica que también se pueden observar puntos definidos por la ecuación de  $fr$  sin la presencia del ruido externo en el sistema electrónico de Chua operando en régimen caótico. Aquí se ha utilizado un parámetro de ajuste para que la respuesta del sistema observada a través del histograma de frecuencias de pulso  $f_p$  se acercase todavía más al punto esperado de la frecuen-

cia fantasma. Este resultado abre posibilidades de análisis para la interacción del sistema de Chua con señales sinusoidales, considerando la influencia de la modulación en los fenómenos, que en este caso ha sido controlada a través del parámetro  $m$ .

Con relación a la estructura de frecuencia mostrada por D. Chialvo y Schouten (*fig.3.22*) también en este caso ha sido observada experimentalmente.

### 3.3.2 Interacción con ruido

Para verificar el fenómeno de resonancia fantasma en el sistema caótico de Chua utilizando ruido, primero es necesario producir el fenómeno de resonancia estocástica en el sistema, y de esta manera, obtener el punto óptimo de ruido que maximizará la detección de las frecuencias.

La observación del fenómeno de resonancia estocástica dicta que es necesario que la intensidad de amplitud de la señal sinusoidal externa sea lo bastante débil para que se garantice que los saltos sean producidos por la intensidad de ruido [45]. En el caso del sistema de Chua es posible verificar este hecho a través de la identificación de umbral que existe entre los atractores espiral simple y doble, que puede conseguirse forzando el sistema con una señal sinusoidal y estudiando las relaciones que existen entre la respuesta del sistema y la señal externa [21], [59], conforme se ha visto en el apartado anterior.

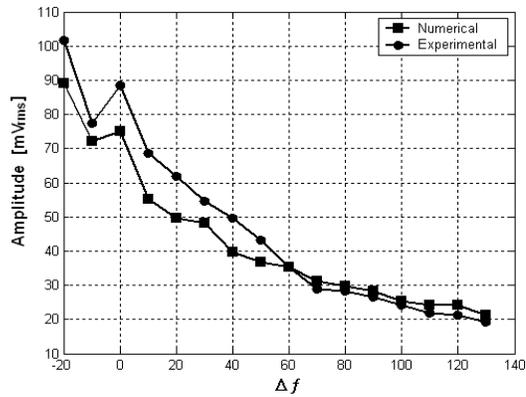
El procedimiento para observar resonancia estocástica en el caso de una suma de señales no es muy diferente del caso de una única señal, por ejemplo; se consideran los siguientes parámetros experimentales  $f_0 = 30Hz$ ,  $n = 2$ ,  $k = 2$ , y  $f_1$ ,  $f_2$  definidos como en la *eq.3.9*. En base a los argumentos anteriores se escribe el forzamiento sinusoidal externo como:

$$E(t) = E_0 [\sin(2\pi f_1 t) + 0.5 \sin(2\pi f_2 t)], \quad (3.13)$$

aquí,  $f_1 = 60Hz$ ,  $f_2 = 90Hz$ .

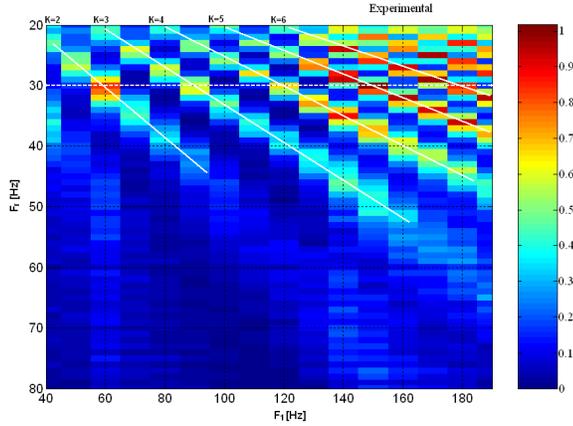
Analizando la respuesta del sistema en cada valor del desplazamiento  $\Delta f = 10Hz, 20Hz, \dots, 130Hz$ , y controlando el valor de intensidad de amplitud  $E_0$  para garantizar que el sistema no pueda saltar entre los atractores caóticos, igual que en el apartado anterior, se define de manera experimental el umbral entre los atractores caóticos utilizado el forzamiento combinado por los dos componentes de diferentes frecuencias, el resultado se presenta en la *fig.3.28*. La figura muestra dos curvas: una corresponde al resultado experimental y la otra al resultado numérico. Por debajo del umbral observado en la figura sobrevive el atractor espiral simple y por encima del umbral el sistema hace excursiones entre sus puntos fijos inestables apareciendo el atractor espiral doble.

Este resultado muestra que los puntos de amplitud cambian a medida que se cambian el desplazamiento  $\Delta f$ , esto enmarca una diferencia entre la verificación experimental acerca de resonancia fantasma utilizando un sistema excitable (Chialvo y colaboradores) y un sistema caótico de Chua; el primero utiliza intensidad de amplitud constante que hace posible la no observación de saltos a través del umbral para todo valor del desplazamiento  $\Delta f$ , pero como muestra la *fig. 3.28*, en el sistema de Chua esto no es posible, aunque esto no significa que los puntos de  $fr$  no puedan obtenerse a partir de la combinación aislada de los valores de la intensidad de amplitud  $E$  y desplazamiento  $\Delta f$  relacionados en la misma figura.



**Fig. 3.28.** Intensidad de amplitud externa  $E_0$  versus desplazamiento de frecuencias de la señal externa  $\Delta f$ . Se observa en la salida del sistema  $V_2$  que por debajo del umbral oscila solamente el atractor espiral simple.

El punto óptimo de ruido se obtiene de la manera tradicional: se añade al sistema una señal sinusoidal *eq.3.13*, se fijan los parámetros de desplazamiento  $\Delta f$  y de intensidad de amplitud  $E_0$  en cualquier punto definido en la *fig.3.28*, entonces, sumando ruido al sistema se varía su intensidad  $N$ . De acuerdo con la resonancia estocástica, el nivel óptimo de ruido es lo que causa la máxima coherencia en la respuesta de un sistema forzado por la señal sinusoidal externa; esto puede ser fácilmente comprobado calculando la relación señal ruido, donde se puede detectar que los componentes alcanzarán un máximo al mismo nivel del ruido y luego decrecerán. Ha de recordarse que en el sistema del Chua no es necesario buscar un nivel óptimo de ruido para cada par de valores de la intensidad de amplitud  $E$  y desplazamiento  $\Delta f$  porque, conforme se expuso en el capítulo anterior, el punto óptimo no cambia significativamente cuando se



**Fig. 3.29.** Resultado experimental. Respuesta que muestra la frecuencia fantasma. En el eje de las abcisas se presenta la frecuencia  $f_1$ , y en el eje de las ordenadas la  $f_r$ . Las líneas señalan la probabilidad de observar la frecuencia fantasma para  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ .

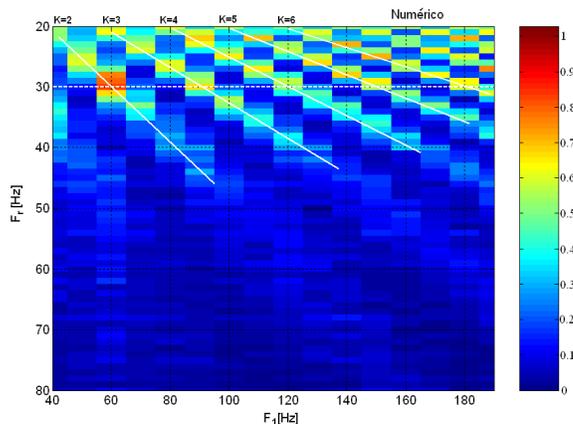
cambian las frecuencias de la señal externa. A través de estos argumentos se ha obtenido el valor óptimo de ruido  $N = 0.3V[rms]$  que se mantendrá en todos los experimentos de este apartado.

Una vez definido el ruido óptimo y el umbral, el procedimiento para la verificación experimental de la aparición la frecuencia fantasma sigue el procedimiento estándar; se añade al sistema ruido y la señal sinusoidal externa, pero en este caso se analizan los cambios de los valores del desplazamiento  $\Delta f$  combinados al de la intensidad de amplitud definidos en la *fig.3.28*. En cada punto se verificó, a través de los histogramas, que la respuesta del circuito de Chua (salida  $V_1$ ) aparece en puntos que obedecen la *eq.3.10*, este resultado caracteriza la resonancia fantasma  $f_r$ . Los resultados experimentales se encuentran en la *fig.3.29* y los resultados numéricos se muestran en la *fig.3.30* como comparación. Conviene remarcar el hecho de que el sistema responde con los valores definidos por la *eq.3.10* y presentan picos que son observados en valores de  $k = 2, 3, 4, 5$ , que son similares a los presentados en [54], [55], [56] y [57].

Se puede notar que el sistema responde con puntos definidos de la *eq.3.10* que es la firma de la resonancia fantasma. En un marco general, estos resultados pueden utilizarse en aplicaciones de control de sistemas caóticos cuando están sujetos a una combinación de señales sinusoidales externas.

### 3.3.3 Resumen

En estos apartados se ha estudiado el fenómeno de resonancia fantasma.



**Fig. 3.30.** Resultado numérico. Respuesta que muestra la frecuencia fantasma . En el eje de las abscisas se presenta la frecuencia  $f_1$ , y en el eje de las ordenadas la  $f_r$ . Las líneas señalan la probabilidad de observar la frecuencia fantasma para  $k = 2, 3, 4, 5, 6$ .

En el apartado 3.2.1 se ha estudiado el fenómeno sin la presencia del ruido externo y en el apartado 3.2.2 añadiendo ruido al sistema.

Las verificaciones experimentales han sido hechas utilizando  $f_0 = 30Hz$ , es decir, mucho más baja que la frecuencia media del sistema  $f_{ch}$ .

En ambos casos se ha mostrado la posibilidad de observación del fenómeno.

En estos experimentos se ha mostrado que la presencia de un factor para el control de la modulación ( $m$ ) de la señal externa puede ser importante para la observación del fenómeno en el sistema caótico de Chua.

### 3.4 Resonancia de coherencia

El fenómeno de resonancia de coherencia se caracteriza por una respuesta óptima de un sistema bajo un nivel óptimo de ruido sin la presencia de ningún otro forzamiento externo. En este sentido no es muy diferente del fenómeno de resonancia estocástica, excepto por la ausencia de una señal externa al sistema; por este motivo a veces es conocido como “resonancia estocástica sin forzamiento externo”. Es bien sabido que el efecto del ruido en sistemas puramente temporales puede inducir a la observación de fenómenos de transiciones [60], o de inducción de transporte [9]; en sistemas extendidos el ruido es conocido por inducir una larga variedad de efectos de orden como estructuras coherentes [45], transiciones de fases [30], separación de fase [61], resonancia estocástica espacio temporal [31], doble resonancia estocástica [62], entre muchos otros. La posibilidad de observar resonancia de coherencia ha atraído la atención de

la comunidad científica recientemente [40], en particular, el fenómeno ha sido mostrado en un principio en sistemas excitables bajo la influencia de fluctuaciones. Una de las características principales de los sistemas excitables consiste en que un pulso generado en la salida del sistema es básicamente independiente de la magnitud de la perturbación.

El fenómeno de resonancia de coherencia ha sido mostrado en un sistema de Chua, tanto numérica [14] como experimentalmente [15], [16]. El interés aquí es exponer, a través de los resultados obtenidos en estos trabajos([14], [15], [16]), las principales características de la resonancia de coherencia que aparecen en el sistema de electrónico de Chua operando en régimen caótico. El hecho de que este fenómeno pueda aparecer en este sistema complementa el estudio acerca de la interacción de un sistema de Chua con una fuente de ruido externo.

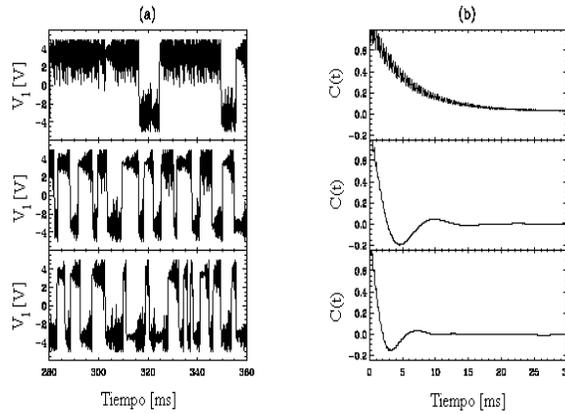
Para los análisis de este fenómeno se toman valores similares para los parámetros del sistema de Chua que fueron utilizados en los experimentos de este apartado:  $C_1 = 10nF$ ,  $C_2 = 100nF$ ,  $L = 18mH$ ,  $R = 1.673k\Omega$ ,  $TL084CN$ .

Debido a la utilización de otros componentes para capacitores e inductores, la frecuencia interna del sistema en este experimento ha sido de  $2.3kHz$ . Conviene destacar el hecho de que los componentes son nominalmente los mismos excepto por las tolerancias  $\pm 10\%$ , lo que ha sido la causa del cambio de la frecuencia.

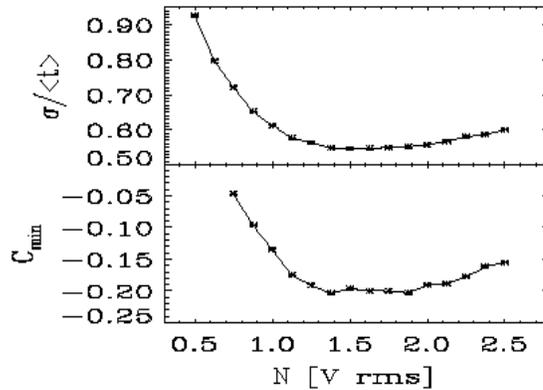
En ausencia de la señal sinusoidal externa, cuando el sistema es forzado con niveles bajos de intensidad del ruido, el atractor caótico no es capaz de saltar al atractor imagen de espejar. Como no existe una fuerza sinusoidal periódica externa, no se espera ningún pico indicador de resonancia, que generalmente es observado a través del SNR. Esto significa que hay que buscar otros indicadores.

Para cuantificar los resultados se calculó la variancia del tiempo de residencia  $t_r$  en los atractores caóticos normalizada al valor medio de tiempo  $\langle t \rangle$  y la función normalizada de autocorrelación de las series de tiempos [15]. Los resultados se presentan en la *fig. 3.31*. En la figura se muestran tres trazas temporales típicas para el voltaje  $V_1$  con el sistema operando en niveles de ruido bajo, medio y alto (*fig. 3.31a*). Cabe destacar que para el nivel intermedio de ruido (el óptimo), la regularidad del proceso de saltos se hace evidente. Esta es la primera indicación de que el ruido conduce al sistema caótico a una conducta más regular. La función de autocorrelación mostrada en la *fig.3.31b* presenta un punto mínimo, bastante profundo en el mismo nivel de ruido, indicando anticorrelación máxima entre los estados.

Estos resultados revelan la existencia de un efecto constructivo del ruido que es capaz de inducir regularidad en el proceso de transición de un atractor a otro. Finalmente en la gráfica *fig. 3.32*, se muestran la variancia normalizadas del tiempo de residencia  $t_r$  y el mínimo de la función de correlación versus



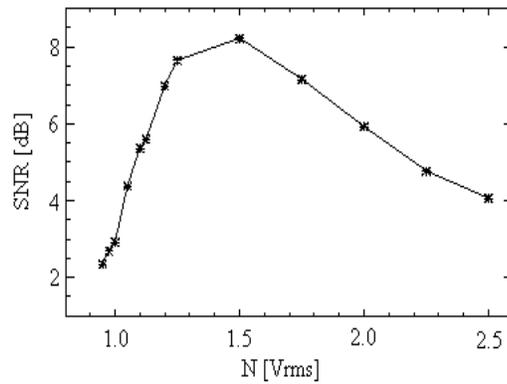
**Fig. 3.31.** (a) Series de tiempos ( $V_1$ ) para diferentes niveles de ruido  $0.5V[rms]$ ,  $1.5V[rms]$  (óptimo) y  $2.5V[rms]$  (b) Función de autocorrelación bajo los mismos niveles de ruido.



**Fig. 3.32.** (a) variancia del tiempo de residencia  $T_r$  (b) Función de correlación mínima  $C_{\min}$  en función del ruido.

la función de autocorrelación de los niveles de ruido. De ambas cantidades se obtiene un mínimo cercano a la intensidad de ruido  $1.5[Vrms]$ .

En algunos sistemas suele pasar que el nivel óptimo de ruido observado para la resonancia de coherencia coincide con el nivel óptimo de ruido en la resonancia estocástica (con señal sinusoidal externa sumada al sistema). Se ha podido mostrar este hecho de forma experimental; para ello se ha sumado al sistema, con los mismos parámetros definidos en este apartado ( $f_{ch} = 2.3kHz$ ), una señal sinusoidal externa  $E = E_0 \sin(2\pi f_0 t)$ , con  $E_0 = 20mV$  y  $f_0 =$



**Fig. 3.33.** SNR en función del ruido, bajo señal sinusoidal externa  $E = E_0 \sin(2\pi f_0 t)$  con  $f_0 = 2.1 \text{kHz}$  y  $E_0 = 20 \text{mV}$ , en este caso  $f_{ch} = 2.3 \text{kHz}$ .

$2.1 \text{kHz}$ , y luego se ha variado el ruido. El resultado se muestra en la *fig. 3.33*. Destaca el hecho de que el valor óptimo de ruido en la resonancia estocástica coincide con el valor calculado para la resonancia de coherencia.

El desplazamiento del punto óptimo del ruido aquí, ha sido debido al cambio de la frecuencia interna del sistema  $f_{ch}$ , mostrando que cambios en la frecuencia interna del sistema también inducen cambios en la observación de los fenómenos en el sistema caótico de Chua.

### 3.4.1 Resumen

En este apartado se ha mostrado que las principales características del fenómeno de resonancia de coherencia aparecen en un sistema de Chua operando en el régimen caótico. Se ha podido observar:

Una respuesta más periódica en la salida del sistema;

El ruido óptimo coincide en los fenómenos de resonancia estocástica y de coherencia;

La frecuencia interna del sistema (al igual que el valor de la resistencia  $R$ ) también induce cambios en el valor óptimo de ruido.



## 4. Conclusión

En esta parte del trabajo se ha estudiado la interacción de señales externas con el circuito electrónico de Chua operando en el régimen caótico y se ha buscado la verificación experimental de los fenómenos de resonancia estocástica, resonancia de coherencia y el fenómeno de la fundamental ausente (resonancia fantasma). Los análisis y resultados obtenidos han sido expuestos en dos capítulos.

En el capítulo 2 se ha explicado el funcionamiento del circuito de Chua según el comportamiento de las salidas dinámicas  $V_1$ ,  $V_2$  cuando el sistema está sujeto a la variación de los principales parámetros de control: la frecuencia  $f_0$  y amplitud  $E_0$  de la señal externa, la resistencia variable  $R$  del circuito de Chua y la intensidad del ruido externo  $N$  (ruido blanco Gaussiano), parámetros que fueron necesarios para la verificación experimental de los fenómenos en esta parte del trabajo. Se ha podido observar que la variación de los parámetros internos o externos puede hacer que las trayectorias dinámicas de  $(V_1, V_2)$  se aproximen a su punto más inestable, caracterizado por la órbita interna del sistema. Si la aproximación es efectiva entonces se generan saltos entre los atractores caóticos, apareciendo en el espacio de fases el conocido atractor espiral doble.

A partir del análisis de la interacción de los parámetros de control con el sistema, que se ha observado a través del comportamiento de las órbitas del atractor espiral simple, fue posible definir, de modo cuantitativo, los valores de los parámetros que se han considerados óptimos para observar los fenómenos.

Uno de los resultados importantes dentro de estos análisis, ha sido la determinación de la curva de amplitud en función de la frecuencia de la señal externa que ha definido un umbral entre los atractores caóticos; este umbral ha sido importante para la observación del fenómeno de resonancia estocástica. Se ha visto que, al contrario de otros sistemas, este umbral depende de la frecuencia de la señal externa. También ha sido comentado que para pequeñas variaciones de la intensidad de ruido, el comportamiento de las órbitas internas del atractor es similar al producido por pequeñas variaciones de la amplitud de la señal sinusoidal externa a frecuencia constante.

También se ha explicado la dependencia del sistema con variaciones de la resistencia interna  $R$  del circuito; su variación da inicio a un proceso de bifurcaciones. Bajo pequeñas variaciones de  $R$  se ha mostrado que ésta influye en los valores de los parámetros que fueron considerados óptimos para la observación de los fenómenos analizados aquí. A priori, estos análisis sirvieron como método experimental para definir las condiciones iniciales del sistema.

Una vez definidos los valores de control, se pasó al estudio de la resonancia estocástica en el capítulo 2, (apartado 3.1). Para este fenómeno se detectó un claro máximo en la relación señal ruido para todas las frecuencias analizadas; este máximo caracteriza la resonancia. Se ha observado que lo máximo se da aproximadamente para el mismo nivel de ruido, independientemente de la frecuencia de la señal externa. También se observó una resonancia en los armónicos de las señales externas (tercer armónico de  $f_0$ ).

Además de estos resultados se ha analizado la influencia de otros parámetros. En el caso de la variación de la amplitud de la señal externa en el sistema, se ha visto que para amplitudes más altas que el umbral, el ruido degrada la señal y la resonancia deja de existir; en cambio para amplitudes cercanas al umbral la resonancia estocástica es maximizada.

En el caso de la variación de la resistencia variable del circuito se detectó que los valores óptimos de ruido cambian con las variaciones de la resistencia  $R$ . Este hecho fue caracterizado por el desplazamiento lateral del máximo. También se mostró experimentalmente que este sistema exhibe resonancia estocástica a frecuencias mucho más bajas que la frecuencia interna del sistema  $f_{ch}$ .

Para la cuantificación de estos resultados se ha utilizado la relación señal ruido y el factor de amplificación  $\eta$ , que en una adecuada normalización, se ha mostrado que es el mismo para todas las frecuencias estudiadas para valores de  $E_0$  cercanos al umbral. Además ha sido mostrado que éstos resultados pueden ser ajustados a una curva obtenida a través de la teoría adiabática.

La resonancia estocástica en sistemas de Chua ha sido también analizada a través de histogramas de tiempos. Se ha expuesto que la probabilidad para el tiempo de residencia consiste de una serie de picos que aparecen en múltiplos pares de la mitad del periodo de la señal sinusoidal de entrada. Similarmente, la distribución de probabilidad del tiempo de pulso consiste en una secuencia de picos que aparecen en múltiplos de la señal periódica, y la modulación puede ser descrita a partir de la distribución gamma con un parámetro de forma que crece con la intensidad de ruido. Los picos de la probabilidad del tiempo de residencia y de pulso están asociados con la dinámica interna del atractor  $1/f_{ch}$ .

También se ha mostrado que el tiempo de saltos decae exponencialmente con la intensidad de ruido para amplitudes de la señal externa situadas por debajo del umbral, para todas las frecuencias de la señal externa. Además

se ha visto que la intensidad del ruido óptima corresponde a un punto de inflexión en el estudio de la dependencia del ruido, y es proporcional al número de residencia o al tiempo de pulso cercano a los picos de su propia distribución de probabilidades y también al número total de estos tiempos. La intensidad de ruido óptima es la misma que ha sido definida a través del máximo observado en la curva para el factor de amplificación que ha sido calculado a través de la transformada de Fourier de la señal de salida del sistema.

En el apartado 3.2 se ha estudiado el fenómeno de la resonancia fantasma con y sin la presencia del ruido externo. Al añadirse ruido al sistema, ha sido posible verificar algunas de las principales características del fenómeno para frecuencias de la señal externa bajas.

Se ha expuesto también la posibilidad de verificar el fenómeno sin la presencia de ruido externo; en este caso se han utilizado frecuencias de la señal externa del mismo orden de magnitud que la frecuencia interna de sistema  $f_{ch}$ . Se ha mostrado que una variable utilizada para el control de la modulación  $m$  de la señal externa puede ser importante para la observación del fenómeno.

En el apartado 3.3, se ha estudiado el fenómeno de resonancia de coherencia. Se ha visto que en la salida del sistema se detecta una respuesta casi periódica, y que es inducida por efecto de una cantidad óptima de ruido externo. También han sido comparados los resultados entre los fenómenos de resonancia estocástica y de coherencia, y se ha verificado una posible relación entre ellos, dado que los niveles óptimos del ruido apreciados en los dos fenómenos coinciden entre sí. Los resultados han sido cuantificados a través de la variancia del tiempo de residencia, de la presencia de un mínimo en la función de correlación temporal y de la presencia del máximo en la SNR.

Finalmente, como consecuencia de estos estudios quedan abiertas otras posibilidades como la interacción del ruido de color con este sistema caótico. Las combinaciones con más de una señal sinusoidal ofrecen varios fenómenos que todavía no están totalmente aclarados: el fenómeno de la fundamental ausente (frecuencia fantasma) es uno de ellos. Estos resultados probablemente puedan ser extendidos en aplicaciones en el estudio de sincronización y control de sistemas caóticos.

En la siguiente parte del trabajo se estudiará la sincronización entre sistemas de Chua operando en el régimen caótico. El sistema será usado como aparato experimental para estudios de fenómenos en los que los parámetros internos del sistema juegan el papel principal.



## Bibliografia

1. H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celest.* New York: Dover (1957).
2. E.N Lorenz, *Journal of Atmospheric Sciences*, **20**, 130 (1963).
3. N.B. Abraham, E. Arimondo, and R.W Boyd, *Pub. Corp. NY*, 375 (1988).
4. G.J. Sussman and J. Wisdom, *Science*, **241**, 433 (1988).
5. L. Glass and M.Macley, *Ann. of New York Acad. of Sci.*, **35**, 214 (1979).
6. L.O. Chua, *Int. J. Elec. Comm.*, **46**, 250 (1992).
7. F. Moss, A. Bulsara and M.F. Shlesinger, *Proceeding of the NATO Advanced Research Workshop: SRPB*, eds. *J. Stat. Phys.*, **70**, 1 (1993).
8. L.M. Pecora and T.L. Carroll, *Int. J. of Bif. and Chaos*, **2**, 973 (1990).
9. R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani, *J. Phys. A*, **14**, 453 (1981).
10. C. Nicolis and G. Nicolis, *Tellus*, **33**, 225 (1981).
11. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223 (1998).
12. D.R. Chialvo, *Chaos* **13** (4), 1226 (2003).
13. J.L. Schouten, R.J. Risma, and B.L. Cardoso, *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 1418 (2003).
14. C. Palenzuela, R. Toral, C. Mirasso, O. Calvo and J. Gunton, *Europhys. Lett.*, **56**, 347, (2001).
15. O. Calvo, C. R. Mirasso and R. Toral, *Electron. Lett.*, **37**, 1062 (2001).
16. O. Calvo, I. Gomes, C. Mirasso and R. Toral, *AIP Conference Proceedings of the 6th ECC, Potsdam, Germany*, **622**, 427 (2002).
17. J. Garcia-Ojalvo and J.M. Sancho, *Phys. Rev. Lett* **71**, 1542 (1993).
18. R.N. Madan, *Chaos circuit: A paradigm for chaos*, *World Scientific* (1993).
19. Y. Braiman, I. Goldhirsch, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2545,(1991).
20. M.S. Baptista, T.P. Silva, J.C. Santorelli, I.L. Caldas, E.J. Rosas, *Phys. Rev. E* **67**, 056212, (2003).
21. I. Gomes., C.R Mirasso, R.Toral and O. Calvo, *Physica A*, **327**, 115 (2003).
22. O.E. Rossler *Phys. Lett A* **57**, 397 (1976).
23. N. Wax, *Selected papers on noise and stochastic processes*, *Dover New York*, (1954).
24. V.S Anishchenko, M.A Safonova, L.O. Chua, *Int. J. Bifurcation Chaos* **2**, 441, (1994).
25. F.T. Arecci, A. Politi, *Phys. Rev. A* **29**, 1006, (1984).
26. S.P. Lipshitz, R.A. Wannamaker, J. Vanderkooy, *J. audio Eng. Soc.* **40**, 335, (1992).
27. D.W.E. Schobben, R.A. Beuker, W. Omen, *IEEE Trans. Signal Processing* **45**, 2097,(1997).

28. A.R. Bulsara, L. Gammaitoni, *Phys. Today* **39**, marzo (1996).
29. P. Debye, *Polar Molecules*, New York: Dover (1929).
30. S. Fauve and F. Heslot, *Phys. Lett. A*, **97**, 5 (1983).
31. V.S Anishchenko, M.A. Safonova and L.O. Chua, *Int. J. Bif. Chaos* **2**, 397 (1992).
32. M.E Inchiosa and A.R. Bulsara, *Phys. Rev. E* **51**, 2021 (1996).
33. T. Zhou and F. Moss, *Phys. Rev. A* **41**, 4255 (1990)
34. J.E Levin, J.P. Miller, *Nature* **380**, 165 (1996)
35. J.J Collins, T.T. Imhoff, P. Grigg, *Phys. Rev. E* **56**, 923 (1997)
36. B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A*, **39**, 4854 (1989).
37. A.S AnisHchenko, M.A Safonova, L.O. Chua, *J. Stat. Phys.* **70**, 183, (1993).
38. G. Nicolis, C. Nicolis, D. McKerman, *J. Stat. Phys.* **70**, 125, (1993)
39. Z. Gingl, L.B. Kiss, F. Moss, *Europhys Lett* **29**, 191 (1985).
40. B. McNamara and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A*, **39**, 4854 (1989).
41. J.K. Doglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, F. Moss, *Nature* **365**, 337, (1993).
42. D.R Chialvo, A.V. Apkarian, *J. Stat. Phys.*, **70**, 335, (1993).
43. D.J Gluckman, T.I Netoff, E.J. Neel, W.L. Ditto, M.L. Spano, S.J. Schiff, *Phys. Rev. Lett*, **77**, 4098, (1996).
44. B. Shulgin, A. Neiman, V. Anishchenko, *Phys. Rev. Lett*, **75**, 4157, (1995).
45. L. gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, *Rev. Modern Phys.*, **70**, 223, (1998).
46. S. Bahar, A. Neiman, L.A. Wilkens, F. Moss, *Phys. Rev. E*, **65**, 50901, (2002).
47. E.G. Boring, *Sensation and perception in the history of experimental psychology* New york: Apptlen-Century **42** , 7 (1942).
48. G.S. Ohm, "On the definition of a tone with the associated theory of the siren and similar sound producing devices", translated by Lindsay, reprint in Lindsay, 242 (1973).
49. H. von Helmholtz, "On the sensation of tone", New york, Dover, English translation A. J. Ellis (1885), reprint (1954).
50. S. F. Schouten, Ed. by R. Plomp and G.F Smoorenburg, Lond, Sijthoff, 41 (1970).
51. E. de Boer, Ed. by W.D. Keidel and W.D. Neff, Berlin, Spring-Verlag **3**, 479 (1976).
52. R.S. Tuner, *The British J. for Hist. of Sci.*, Spring-Verlag **10**, 1 (1977).
53. S. F. Schouten, *Proc. Kon. Acad. Wetensch (Neth)* **41**, 1086 (1938).
54. D.R. Chialvo, *Chaos* **13** (4), 1226 (2003).
55. S. F. Schouten, R.S. Ritsma, and B.L Cardoso, *J. Acoust. Soc. Am.* **34**, 1418 (1962).
56. J.M. Buldu, D.R. Chialvo, C.R. Mirasso, M.C. Torrente, and J. Garcia-Ojalvo, *Europhys. Lett* **64**, 178 (2003).
57. O. Calvo and D.R Chialvo, *J. Bifur. and Chaos* **16**(3), 731 (2006).
58. D.R Chialvo, O. Calvo, D.L. Gonzales, O. Piro, and G.V. Savino, *Phys. Rev. E* **65**, 050902 (2002).
59. W. Korneta, I. Gomes, C.R. Mirasso, R. Toral, *Physica D* **219**, 93 (2006).
60. L.O Chua, *Int. J. Elec. Comm.* **46** , 250 (1992).
61. H.G. Shuster, *Deterministic Chaos*, VCHV Verlagsgesellschaft, Weinheim (1989).
62. A. A zaikin, J. Kurt and L. Schimasky-Geier, *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 227 (2000)

## Parte II

### Sincronización entre sistemas caóticos



## 5. Introducción

El estudio de la sincronización entre sistemas acoplados es conocido desde el trabajo de Huygens en 1673 que trataba sobre péndulos interconectados. Posteriormente estos conceptos fueron aplicados a diversos sistemas, y fue a principios del siglo XX cuando se descubrió que también pueden observarse en sistemas eléctricos y electromecánicos [1]. Recientemente, a partir de los estudios de oscilaciones caóticas, se ha verificado la posibilidad de sincronización de sistemas que exhiben tal comportamiento. Han sido Pecora y Carroll los que han mostrado experimentalmente que comportamientos caóticos aparentemente aleatorios e imprevisibles pueden fundirse en una única trayectoria; con estos resultados surgieron nuevas expectativas en torno a la teoría del caos [2].

Lo sorprendente del fenómeno de sincronización entre dos sistemas caóticos aparece cuando se considera la dependencia de la dinámica caótica en las condiciones iniciales del sistema. Esta cualidad hace que la más mínima diferencia en la descripción del estado del sistema provoque cambios que hace distintos a sistemas complejos que originariamente eran tan parecidos como se les quiera suponer. Pero, bajo el peso de una suficiente intensidad de acoplamiento, inicialmente los sistemas podrán evolucionar siguiendo una trayectoria común, dando lugar al fenómeno de sincronización.

La sincronización entre dos sistemas se consigue cuando uno de ellos cambia su trayectoria, bien hacia la seguida por el otro sistema o bien hacia una nueva trayectoria común a ambos [3]. De manera genérica la sincronización caótica puede ser definida como una conformidad en el tiempo de dos o más procesos caóticos, caracterizada por una métrica entre algunas variables de estos procesos. El fenómeno de sincronización también puede ser visto como una manifestación de la tendencia a la auto-organización en sistemas complejos [1].

En el pasado el estudio de la sincronización se limitaba al análisis de sistemas con comportamiento periódico. A partir del estudio de comportamientos complejos (quasi periódicos, caos) se han observados nuevos tipos de sincronización que pueden asumir diversas formas, lo que implica diversidad de tipos de sincronización. Una vez definido el tipo de sincronización deseada, el problema central consiste en establecer la existencia y la estabilidad de las soluciones que

corresponden a un movimiento sincronizado. En proyectos de sistemas (especialmente importante en esta parte del trabajo) esto influye en la determinación del tipo de acoplamiento deseado, lo cual marca la necesidad de establecer algún tipo de conexión entre ambos sistemas. Cabe destacar que la conexión escogida es fundamental para que el fenómeno tenga lugar. El acoplamiento podrá ser fundamentalmente de dos tipos: difusivo y conductivo.

Por regla general, los acoplamientos difusivos aparecen cuando los sistemas son conectados a través de un término de difusión que regula con su valor el estado de sincronización de ambos sistemas. El segundo tipo de acoplamiento, el conductivo, se lleva a cabo mediante la conducción de la dinámica de uno de los sistemas por alguna de sus variables que actúa como conductor. Esta conducción puede ser global o local según que la introducción de la variable conductora reemplace en parte o totalmente a su variable análoga en el sistema receptor. Dentro de estos dos grupos existen diversas modalidades; así el acoplamiento podrá ser unidireccional o bidireccional, global o parcial, simple o complejo. Pero hay que tener en cuenta que continuamente aparecen en la literatura científica nuevas modalidades de sincronización [4]. Existen diferentes nociones o definiciones de sincronización, algunas de ellas son: sincronización idéntica, sincronización de fase, sincronización de retardo y sincronización generalizada.

Estos tipos distintos de sincronización siguen los siguientes requisitos básicos: separación del sistema global en subsistemas, un método de medición de propiedades específicas de las trayectorias de los subsistemas, un método de comparación de estas propiedades, un criterio que permita evaluar la existencia de conformidad temporal, etc.

En particular en esta parte del trabajo se estudia en dos formas de arquitectura de acoplamiento en un sistema de Chua operando en el régimen caótico: la sincronización entre dos únicos elementos interconectados entre si y conectados de forma bidireccional, y la sincronización entre tres circuitos de Chua conectados bidireccionalmente en forma de cadena lineal.

La primera arquitectura ha sido construida para estudiar los resultados de un modelo de ecuaciones conocidas como “desarrollo del parametro de orden” (Order Parameter Expantion). La idea general que propone está relacionada con una de las características conocidas de los sistemas complejos que aparece cuando se analiza la dinámica de diferentes sistemas: en general ésta depende del nivel de observación adoptado. La dinámica de poblaciones biológicas es un ejemplo clásico. Esta dinámica puede aplicarse al estudio de procesos moleculares; a la interacción entre dos células o a una única célula. Mientras que las propiedades del proceso molecular de una única célula en una población son bien conocidas, la función y el papel de la población no lo son. A nivel de or-

ganismo, sería interesante que la evolución dinámica de la población estuviera fundamentada en algunas de las normas de la interacción de células individuales. Así, el modelo es una propuesta dirigida al estudio de cómo aproximar la dinámica macroscópica emergente dentro del contexto de sistemas dinámicos acoplados globalmente. El análisis dentro de este modelo parte de un régimen de perfecta sincronización entre unidades idénticas, en el cual el desorden es introducido en cualquiera de las formas de diferencia entre parámetros (mismatch) o ruido. De esta manera se utilizarán los circuitos de Chua para la comprobación experimental de algunos de los resultados teóricos del modelo.

La segunda arquitectura está motivada por el reciente interés en el comportamiento colectivo de redes dinámicas y ha sido necesaria para determinar las condiciones por las cuales la sincronización persiste en la presencia de múltiples interacciones entre varios osciladores. Una de las primeras extensiones al caso de dos osciladores es un cadena lineal de tres elementos acoplados. Algunos resultados interesantes en este sentido se han obtenido en sistema de láseres acoplados en cadena lineal [5], [6], [7]. En uno de los resultados se ha descrito que los láseres extremos se encuentran sincronizados, pero el laser central permanece no sincronizado. Este fenómeno abre varias posibilidades en el estudio de sincronización general. Por lo tanto, un objetivo inmediato es estudiar el fenómeno de sincronización en circuitos de Chua acoplados en cadena lineal y estudiar la fenomenología para las diferentes intensidades del acoplamiento.

Es importante remarcar que los tipos de acoplamiento en un circuito de Chua son conocidos en la literatura [8]. En la primera configuración experimental se ha utilizado un acoplamiento bidireccional entre los circuitos electrónicos y para la construcción de este acoplamiento se han utilizado resistores conectados a las variables de salida del sistema ( $V_1$ ,  $V_2$ ). En la segunda configuración experimental se han utilizado una serie de conexiones unidireccionales construidas a través de seguidores de tensión (Buffers) en salidas dinámicas de los elementos del sistema, pero su configuración es bidireccional cuando se tienen en cuenta las conexiones entre los dos sistemas: el central y el externo, por lo tanto, como hay un rector de información entre los sistemas, este tipo de configuración se considera bidireccional.

En los siguientes apartados se ampliará la información acerca de los asuntos comentados. En primer lugar se estudiará el régimen coherente de dos circuitos Chua acoplados mutuamente, y en segundo lugar se analizará experimentalmente la sincronización entre tres circuitos de Chua acoplados.



## 6. Régimen coherente de circuitos acoplados mutuamente

Se estudia la dinámica que emerge entre circuitos de Chua acoplados fuertemente con desintonía de parámetros (“mismatch”). Para una región cercana al estado de perfecta sincronización se muestra cómo combinar parámetros distintos y acoplamientos para obtener un robusto y preciso régimen previamente conocido. Este proceso sirve para obtener regímenes que pueden encontrarse fuera de la escala de parámetros accesibles de un único elemento (aislado). Los resultados se obtienen a través de una técnica teórica reciente conocida como “desarrollo del parámetro de orden” (the order parameter expansion), y se verifican tanto numérica como experimentalmente a través de un circuito electrónico de Chua. Los resultados teóricos indican que el mismo cambio obtenido en la dinámica colectiva puede obtenerse en una población de circuitos electrónicos fuertemente acoplados con desintonía de parámetros.

### 6.1 Introducción

Una de las características más importantes de la interacción entre osciladores es la posibilidad de que se sincronicen. El fenómeno de sincronización es universal en poblaciones y debido a su importancia ha sido estudiado en varias áreas de la ciencia [9], [10], [11]. En particular, ha llamado mucho la atención el estudio de sistemas acoplados globalmente como modelo de una variedad de sistemas físicos [12], químicos [13], [14] y biológicos [15], [16].

En general, los estudios teóricos suponen que las poblaciones están compuestas por unidades idénticas, pero en sistemas experimentales existirá siempre una inevitable diversidad entre los osciladores, o sea, una diferencia (mismatch) en sus parámetros. El efecto de la diversidad entre los sistemas, puede ser un obstáculo a la sincronización y llevar al sistema a un régimen incoherente si el acoplamiento es débil.

La principal característica de incoherencia es que los movimientos de cada elemento de la población se hacen independientes uno del otro. La colectividad dinámica bien algún estacionario alrededor de un valor medio (para infinitos números de elementos) o mostrará fluctuaciones que escalan con el tamaño

de la población. Cuando el acoplamiento crece, algunos o todos los elementos de las poblaciones se sincronizan y como resultado empiezan a detectarse oscilaciones a nivel macroscópico. La transición para la oscilación colectiva está típicamente acompañada por regímenes altamente complejos, como clustering [17], sincronización de fase [18], etc.

Cuando el acoplamiento es muy fuerte los elementos de la población están completamente sincronizados. Esto está caracterizado por el alto grado de coherencia presentada por el comportamiento global de población. Esto significa que todos los elementos de la población deben tener el mismo tipo de dinámica. Aparte de las pequeñas diferencias debido a la diversidad microscópica, se puede decir que la dinámica a nivel microscópico se refleja en la dinámica del nivel macroscópico.

Son numerosos los avances teóricos acerca del análisis del sistema con acoplamiento global, en cambio, la verificación experimental se ha revelado extremadamente difícil. La transición de Kuramoto desde la incoherencia hacia el estado localizado (locked state) es un buen ejemplo en este sentido [19]. Tal ejemplo de transición data de 1975, y es uno de los más conocidos y de resultados más generales en la teoría de sincronización. A pesar de todo, solamente se ha podido verificar experimentalmente en un sistema y requiere una implementación ad hoc [20].

En los experimentos surgen dos problemas principales. Uno es la dificultad en el control o las medidas de los parámetros variables del sistema. El segundo está relacionado con el acoplamiento global, que se da raramente en la naturaleza como un caso límite de acoplamiento local con alta correlación. Esta limitación experimental es especialmente relevante para regímenes cercanos a la incoherencia, que son muy frágiles con respecto a los cambios de las propiedades microscópicas, así como a los efectos de campo finito.

De esta forma, para evitar los problemas asociados a la incoherencia, este trabajo se centra en los acoplamientos globales cercanos al estado de sincronización. Como se ha mostrado recientemente, tal estado coherente no depende demasiado del tamaño de la población [21], [22]. Este hecho es muy importante desde un punto de vista experimental, debido a que el comportamiento colectivo puede estudiarse en sistemas que poseen dos únicos elementos y sus resultados se pueden extender al total de la población. Así mismo, la coherencia dinámica puede describirse a través de ecuaciones de baja dimensión con sólo pocos parámetros.

Las transiciones entre los diferentes regímenes corresponden a bifurcaciones que involucran un pequeño número de grados de libertad y parámetros. De esta forma adquieren una robustez que será muy ventajosa frente a los cambios microscópicos de la población.

Se estudia el régimen de acoplamiento fuerte entre dos circuitos de Chua como una aplicación de tales resultados teóricos, debido a las ventajas de este tipo de circuito, que ya han sido mencionadas en otros apartados.

En el apartado 6.2 y 6.3 se considera algunos conceptos acerca de acoplamiento global y acoplamiento de poblaciones con desintonía en los parámetros.

Así en el apartado 6.4 se calculan las ecuaciones para la dinámica macroscópica de los elementos de una población interactuando reflexivamente (de tamaño  $N$ ) dentro de un régimen coherente. Esta representación sirve para representar la dinámica del sistema experimental. A partir de esto, se presentarán algunos resultados experimentales con el objetivo de comparar la predicción teórica.

En la apartado 6.5 se muestra como la desintonía entre parámetros puede ser usada para conducir al campo medio y al circuito individual a regímenes que son diferentes.

En el apartado 6.6 se considera el caso en que el elemento individual es diferente en escala de tiempo de su movimiento y se expone el régimen de muerte de la oscilación (del inglés "oscillation death"). Aquí los parámetros de diversidad inducen una supresión de las oscilaciones colectivas e individuales.

Por último en el apartado 6.7 se presenta un resumen acerca del capítulo.

## 6.2 Acoplamiento global

Sistemas dinámicos acoplados globalmente han sido estudiados como modelos para poblaciones de osciladores interactuando entre si diversos sistemas, series (arrays) de semiconductores [23], osciladores electroquímicos [24], neuronas [25], etc. De manera general, se pueden hacer algunas consideraciones acerca de elementos dinámicos aislados (o microscópicos, o locales) en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_j = f(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

El acoplamiento global es definido en general como la dependencia de las ecuaciones para cada elemento en los estados de todos los otros elementos (todos contra todos), los cuales contribuyen idénticamente. De esta manera, el término de interacción es comúnmente escrito como una función de media sobre toda la población. En este caso las ecuaciones diferenciales de "acoplamiento global o de campo medio" son expresadas de la siguiente forma

$$\dot{x}_j = f(x_j) + \mathbf{k}(\langle x \rangle), \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{k} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la función de acoplamiento global,  $N$  es el tamaño de la población y  $\langle x \rangle = 1/N \sum_{j=1}^N x_j$  es el promedio sobre toda la población. Estas ecuaciones definen la “dinámica microscópica o individual”.

El acoplamiento global puede ser visto como un caso límite de las diferentes interacciones de estructuras, como si todos los elementos de la población no estuvieran localmente acoplados. En muchos casos relevantes en la práctica, el acoplamiento entre las unidades se debe al proceso difusivo, por eso los términos de interacción son comúnmente escritos en la forma de “acoplamiento lineal”, que aproxima el operador difusión, si la escala de tiempo de difusión es más lenta que la dinámica individual. En este caso la dinámica microscópica para las ecuaciones diferenciales puede ser escrita en la forma:

$$\dot{x}_j = f(x_j) + k'(\langle x \rangle - x_j) \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.3)$$

donde la matriz  $k'$  es la medida para la intensidad de acoplamiento entre los diferentes componente del vector de estado de la dinámica de cada elemento. Aquí, se considerará el caso en que todas las variables se acoplen con la misma intensidad. En este caso,  $k'$  es definido como proporcional a la matriz identidad a través de un coeficiente escalar  $K$ , que es conocido como intensidad de acoplamiento y se habla entonces en “acoplamiento escalar”. Se asume  $K$  como un número real y no negativo.

Acerca del comportamiento colectivo las cantidades medias son típicamente estadísticas, en particular el valor medio de algunas variables serán referidas como “campo medio”, que es usualmente asumido como “observables macroscópicos”.

$$X = \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j. \quad (6.4)$$

Los observables macroscópicos son los que caracterizan el comportamiento global de la población, indicando si la colectividad dinámica pasa por cambios cualitativos.

Desde el punto de vista físico, donde las transiciones de fases son universalmente descritas en términos de cantidades de medias, las variables macroscópicas son también conocidas como “parámetros de orden”.

Se repite aquí, pero en esta ocasión en base a las definiciones matemáticas, que una cuestión general es como caracterizar el comportamiento del campo medio (variables macroscópicas) dadas sus características microscópicas y vice

versa; como sacar información acerca de un elemento de la población a través de medidas puramente macroscópicas.

Todavía no se conoce la solución general para esta cuestión, a pesar de que algunos resultados se han obtenido para un subconjunto dado y a partir de condiciones microscópicas. Estos resultados dependen principalmente de la existencia de casos límites donde el problema puede ser formulado en términos simples, como cuando los osciladores están desacoplados y cuando todos ellos tienen la misma trayectoria.

### 6.3 Poblaciones con “desintonía en los parámetro ”

Aunque las poblaciones de sistemas dinámicos idénticas se han revelado extremadamente útiles en estudios de propiedades colectivas de sistemas con muchos grados de libertad, las poblaciones de elementos reales poseen inevitablemente algún grado de diversidad microscópica.

Las diferencias entre las unidades que componen la población se pueden revelar a sí mismas al nivel de la dinámica emergente, causando así un régimen que no puede ser observado cuando los componentes son estrictamente idénticos [15]. Pero, como se verá más adelante, es posible mostrar que la desintonía entre parámetros (“mismatch”) puede actuar como un parámetro de control induciendo cambios cualitativos en el atractor caótico. Sea el sistema dinámico descrito por:

$$\dot{x}_j = f(x_j, p_j) + \frac{k'}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_j) \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (6.5)$$

Aquí, la dinámica del elemento microscópico (o aislado)  $f(x) = f(x_j, p_j)$  es definida como una función suave  $f_j = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que describe la evolución de  $N$  variables de estado que dependen del vector de estado  $x_j \in \mathbb{R}^n$ .

Se habla de acoplamiento lineal debido a que la ecuación de movimiento de un elemento es alterada por un término que es la combinación lineal de la diferencia entre los vectores de estado de los elementos considerados y el vector de estado de los otros elementos. De esta manera el acoplamiento es aproximadamente difusivo.

La forma lineal del término de acoplamiento es una consecuencia de la linealización del operador difusión cercano a los punto fijos [26]. Cuando los sistemas se encuentran fuera del equilibrio, la aproximación de acoplamiento difusivo puede no ser suficiente. Debido a ello, solamente se tendrán en cuenta poblaciones con acoplamiento lineal, incluso si la deducción de la ecuación

macroscópica es susceptible de una extensión a un caso donde es considerada la no linealidad.

En la *eq.* 6.5 las influencias de los componentes de un estado vectorial de un elemento de la población sobre otros elementos son cuantificados a través de la matriz de acoplamiento  $k'$ . Cuando la matriz es proporcional a la matriz identidad, que es  $k' = KI$ , se habla entonces de un “acoplamiento vectorial isotrópico”, y  $K \in \mathbb{R}$  será la intensidad del acoplamiento. En cambio, cuando solamente una componente está acoplada se habla de acoplamiento escalar. Se considera  $K > 0$  cuando el acoplamiento es isotrópico.

Cuando cada elemento de la población está igualmente influenciado por otras unidades, el término del acoplamiento (todos con todos) es definido como un acoplamiento global:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_j) = (X - x_j) , \tag{6.6}$$

donde el elemento individual está influenciado por el vector medio de estado, definido a través del campo medio:

$$X = \langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \tag{6.7}$$

Se considera ahora una formulación más general de la ecuación :

$$\dot{x}_j = f(x_j, p_j) + \mathbf{k}(X, x_j) , \tag{6.8}$$

donde el intercambio de información de la colectividad en las dinámicas individuales de sus elementos se define a través de una función de acoplamiento global  $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . En consecuencia, si esta función se encuentra dentro del escenario de perfecta sincronización de sistemas idénticos, la función de acoplamiento ha de satisfacer la relación  $\mathbf{k}(X, X) = 0$  y los autovalores de su matriz Jacobiana  $D_x \mathbf{k}(X, X)$  deben tener una parte real y positiva. Dentro de esta aplicación, se utilizará el acoplamiento vectorial lineal, y la relación  $\mathbf{k}(X, x_j) = K(X - x_j)$ .

Por simplicidad, se supone que la diversidad dentro de la población puede ser considerada por un parámetro escalar  $p_j \in \mathbb{R}$  a través del cual el elemento dinámico microscópico depende linealmente (en el sentido en que sus derivadas parciales  $f(x_j, p_j)$  de orden mayores que 1 en  $p_j$ , sean cero).

La desintonía entre los parámetros, no cambia en el tiempo y asumen una distribución  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En principio, aquí no se requiere ninguna

propiedad regular para la distribución, excepto que tenga momentos finitos  $m_q = [\langle G(p) - G(p_0) \rangle]^q$ . Consecuentemente es posible considerar tanto tamaños de población finitas como infinitas. Dentro de este contexto, se distingue el parámetro del nivel individual, esto es, parámetro  $p_j$  que gobierna la evolución del elemento individual, y parámetros a nivel de población.

En particular en pos de dirigir el efecto en la dinámica colectiva en un cambio en el desorden microscópico, la variancia  $\delta^2$  de la distribución de los parámetros se escogerá como un parámetro de control.

### 6.4 El desarrollo del parámetro de orden para circuitos de Chua acoplados

El desarrollo del parámetro de orden [21], [22], [27] es una técnica aplicada al estudio de regimenes que bifurcan, desde un estado de perfecta sincronía, en poblaciones con elementos acoplados global y fuertemente cuando se incrementa desintonía entre los parámetros. Esta aproximación también describe los cambios en el comportamiento coherente que tienen lugar en la diversidad de la población cuando el acoplamiento es modificado. Se deben considerar los principales resultados acerca de este tema a partir de la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = f(x_j, p_j) + K(X - x_j), j = 1, 2, \dots, N, \tag{6.9}$$

donde  $p_j$  es el parámetro desintonía respecto a un valor prefijado que toman los sistemas individuales de la población. La dinámica de cada elemento  $F(X) = f(x_j, p_j)$  se define a través de una función  $f : R^n \rightarrow R^n$ . Todos los elementos se acoplan al campo medio de población  $X = \langle x_j \rangle$  a través de la función de acoplamiento  $K(X - x_j)$  que, como se observará luego, se usa en un acoplamiento electrónico; esto puede hacerse suponiendo este acoplamiento como un operador diagonal (de hecho, en las refs. [22], [27] puede verse representado un sistema más general).

La idea básica del método es obtener una ecuación efectiva de movimiento para el campo medio  $X$ , válida cuando todo elemento se vuelve cercano a  $X$ . Esto puede ocurrir cuando se consideran regimenes que son perturbaciones de estados de perfecta sincronización definidos como  $x_j = X$ . Bajo esta consideración, la eq. 6.9 puede ser desarrollada en desviaciones desde el campo medio  $\epsilon_j = x_j - X$  y desde el parámetro medio  $\Delta = p_j - p_0$ , con  $p_0 = \langle p_j \rangle$ ,

$$\dot{x} = f(X, p_0) + D_x f(X, p_0) \epsilon_j + D_p f(X, p_0) \delta_j + D_{x,p} f(X, p_0) \epsilon_j \delta_j + R(X, p_0, \epsilon_j) + \mathbf{k}(X) \epsilon_j, \tag{6.10}$$

donde la matriz jacobiana de la función de acoplamiento calculada en el estado de perfecta sincronización es  $\mathbf{k}(X) = D_x[K(X, X)] = 0$ . Debido a la dependencia lineal de la dinámica de los elementos microscópicos sobre los parámetros, el término  $R(X, p_0, \varepsilon_j)$  es independiente de  $\delta$  y contiene términos de mayor orden que 1 en  $\varepsilon_j$ , entonces se puede eliminar  $R(X, p_0, \varepsilon_j)$  de la ecuación. Vale mencionar que también se supone

$$\|\varepsilon\| = \|x_j - X\| \ll 1; \quad (6.11)$$

esta condición refleja la idea que, contrario al caso de incoherencia, donde los osciladores están lejos del campo medio, en los casos sincronizados los puntos representativos de la población siguen sólidamente el movimiento del campo medio, por lo tanto se puede decir que la ecuación 6.11 es la condición de coherencia.

Ahora haciendo el promedio para la ecuación 6.10 resulta

$$\dot{x} = f(X, p_0) + D_{x,p}f(X, p_0) \langle \varepsilon_j \delta_j \rangle \quad (6.12)$$

donde

$$W = \langle \delta \varepsilon \rangle, \quad (6.13)$$

es una variable macroscópica, el parámetro de orden de forma (“Shape”). Aquí  $p_0$  es un valor medio y  $\delta^2$  es la desviación estándar de los parámetros de distribución. Los operadores derivadas fueron definidos como:  $D_X = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $D_p = \frac{\partial}{\partial p}$  y  $D_{x,p} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial p}$ .

Ahora el paso es determinar la dinámica del parámetro de forma  $W$  para obtener un sistema cerrado para dos variables macroscópicas. Diferenciando 6.13 y luego substituyendo en 6.10 se obtiene:

$$\dot{w} = [D_x f(X, p_0) - \mathbf{k}(X)] \langle \delta \varepsilon \rangle + D_p f(X, p_0) \langle \delta^2 \rangle + D_{x,p} f(X, p_0) \langle \varepsilon \delta^2 \rangle, \quad (6.14)$$

donde nuevamente se eliminan los términos de orden mayor que  $\varepsilon$ . Para sistemas cerrados, el término  $D_{x,p} f(X, p_0) \langle \varepsilon \delta^2 \rangle$  puede ser eliminado en dos casos: con respecto a  $D_x f(X, p_0) \langle \delta \varepsilon \rangle$ , si los parámetros diferencia  $p_j$  y  $\delta$  son pequeños, y con respecto a  $D_p f(X, p_0) \langle \delta^2 \rangle$  si lo son los parámetros  $\varepsilon_j$  que corresponden a acoplamientos suficientemente fuertes. Por lo tanto las ecuaciones 6.12 y 6.14 proporcionan un sistema dinámico macroscópico o sistema reducido

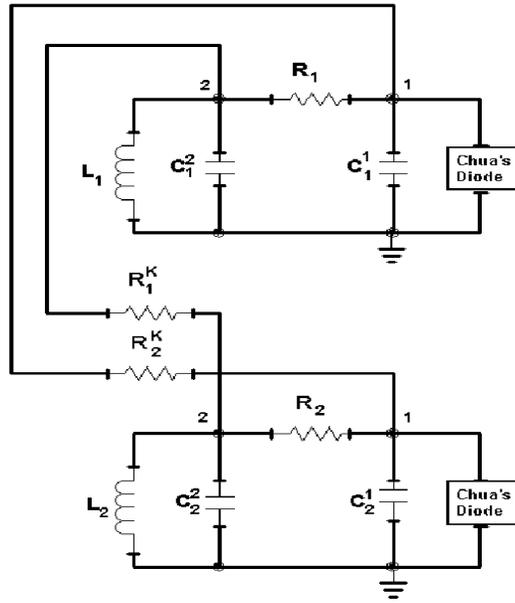


Fig. 6.1. Diagrama esquemático de la configuración experimental

$$\dot{x} = F(X, p_0) + D_{x,p}F(X, p_0)W \tag{6.15}$$

$$\dot{W} = \sigma^2 D_p F(X, p_0) + [D_x F(X, p_0) - K]W$$

Siendo de baja dimensión, esta ecuación posee la ventaja de tener un claro significado físico: el campo medio se comporta de forma similar al elemento medio perturbado a través de la variable macroscópica  $W = \langle \delta\varepsilon \rangle$  que cuantifica la desintonía en el espacio de fases y de parámetros.

Los regímenes macroscópicos aparecen como un desdoblamiento de estados perfectamente acoplados  $\dot{X} = F(X, p_0)$  y son controlados a través de los parámetros  $K$  y  $\delta^2$ . Tal ecuación es considerada cuando el desplazamiento es pequeño desde el campo medio  $\varepsilon$ , o sea, cuando el acoplamiento es suficientemente fuerte en comparación a la desintonía entre parámetros.

Otra consideración importante es que la eq.6.15 no depende del tamaño de la población. Consecuentemente, los resultados obtenidos para dos elementos pueden ser generalizados para un conjunto mayor de elementos.

Se utilizará como aplicación de la eq.6.15 el caso de dos circuitos de Chua mutuamente acoplados. La configuración del sistema experimental que se ha

estudiado está representada en la *fig* 6.1. Las ecuaciones están escritas en términos de los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  y de la corriente  $I$  que pasa por el inductor. Esta es la forma clásica usada para describir las ecuaciones de los circuitos; a continuación se muestran las ecuaciones para el primer circuito:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^1 &= \frac{1}{C_1^1 R_1} V_1^2 - \frac{G_1^a - G_1^b}{2C_1^1} (|V_1^1 + B_1^p| - |V_1^1 - B_1^p|) \\ &\quad - \frac{1}{C_1^1} \left( G_1^b + \frac{1}{C_1^1 R_1} \right) V_1^2 + \frac{1}{C_1^1 R^k} (V_1^1 - V_2^1) , \\ \dot{V}_1^2 &= \frac{1}{C_2^1} I^1 + \frac{1}{C_1^2 R_1} (V_1^1 - V_1^2) + \frac{1}{C_1^2 R_2^k} (V_1^2 - V_2^2) , \\ \dot{I}_1 &= r_1^b I_1 - \frac{1}{L_1} V_1^2 , \end{aligned} \tag{6.16}$$

aquí  $R_{1,2}^k$  son los resistores de acoplamiento; estos resistores serán utilizados como principales parámetros de control. Los parámetros internos se pueden ver en la *fig*. 6.1. A menos que esté indicado explícitamente de otra manera, estos valores serán usados en la próxima sección. El segundo circuito tiene una ecuación equivalente, y está indicado con el índice 2.

Anteriormente, se ha mencionado que el término de acoplamiento en la *eq*.6.16 puede ser asumido como acoplamiento global, y en consecuencia la correspondencia con la *eq*.6.9 se establece fácilmente. La dependencia sobre el campo medio aparece a través la siguiente relación:

$$(V_2^1 - V_1^1) = (V_2^1 + V_1^1 - 2V_1^1) = 2 \langle V_1 \rangle - 2V_1^1 . \tag{6.17}$$

El acoplamiento constante son los factores multiplicativos  $1/C^1 R_k^1$ ,  $1/C^2 R_k^2$ . En este punto, se identifica  $x_j$  como el vector  $\langle V_j^1, V_j^2, I_j \rangle$  y  $f_j(x_j)$  como la ecuación para un solo circuito. La matriz de acoplamiento será:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1^1 R_2^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1^2 R_2^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{6.18}$$

Cuando los dos circuitos tienen capacidades idénticas el acoplamiento es simétrico. La ecuación del sistema reducido para el circuito de Chua puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{G^b}{C^1} V_1 + \frac{V_2 - V_1}{RC^1} - \frac{G^a - G^b}{2C^1} (|V_1 + B^p| - |V_1 - B^p|) \\
f(2) &= \frac{1}{C_2} \left( I + \frac{V_1 - V_2}{R} \right) \\
f(3) &= -\frac{1}{L} (ir^b - V_2)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

y la matriz jacobiana será

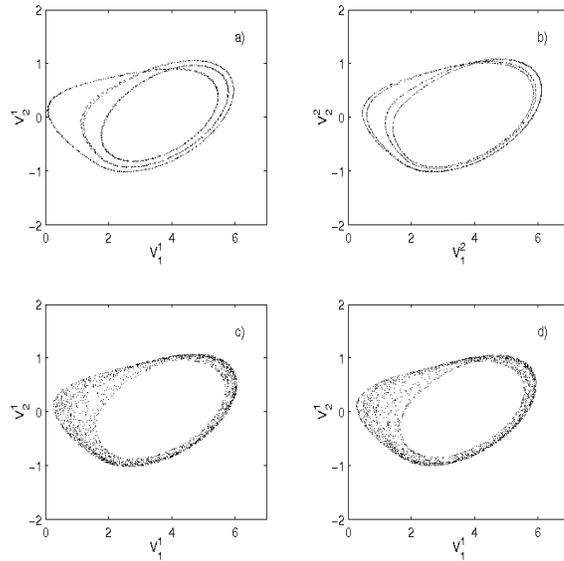
$$J = \begin{bmatrix} \dot{j}_{1,1} & \frac{1}{C_1 R} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R} & -\frac{1}{C_2 R} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & \frac{r_b}{L} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

donde  $\dot{j}_{1,1} = \frac{G^b}{C^1} V_1 + \frac{V_2 - V_1}{RC^1} - \frac{G^a - G^b}{2C^1} (|V_1 + B^p| - |V_1 - B^p|)$ . Con este formalismo, se utilizará la eq.6.15 sobre algunas condiciones específicas y se estudiará el régimen que emerge debido a la desintonía entre los parámetros y el acoplamiento.

## 6.5 Acoplamiento mutuo fuerte

Aquí se considera el caso particular en que la desintonía se limita solamente al valor interno del resistor  $R_{1,2}$ , mientras que el parámetro interno de orden se mantiene idéntico. El resistor de acoplamiento  $R_{1,2}^K$  se escoge bastante débil para asegurar que el acoplamiento sea fuerte y el régimen coherente. Bajo estas condiciones, la colectividad dinámica será igual a la del oscilador medio. Esto corresponde a un sistema de ecuación idéntico para cada elemento simple, excepto para el parámetro en que se impone la diversidad, substituida por el valor medio. Intuitivamente, tal propiedad de la dinámica macroscópica se debe al hecho de que, cuando la matriz de acoplamiento es predominantemente diagonal, el parámetro  $W$  (Shaper) permanece pequeño. Esto corresponde a la situación en que la población se encuentra muy cercana al valor del campo medio. En el límite en que el acoplamiento es infinitamente fuerte,  $W$  desaparece y la eq.6.15 será la ecuación para el oscilador medio.

Con estas consideraciones existen interesantes implicaciones en el control del comportamiento colectivo de poblaciones de sistemas dinámicos, como la detección de características microscópicas en términos de la pura observación macroscópica. Ciertamente, la dinámica que se estabiliza a través de los circuitos no idénticamente acoplados podría no alcanzarse si los elementos no estuvieran acoplados. De este modo el régimen colectivo se codifica en diversidad y acoplamiento más que por las características internas de los circuitos

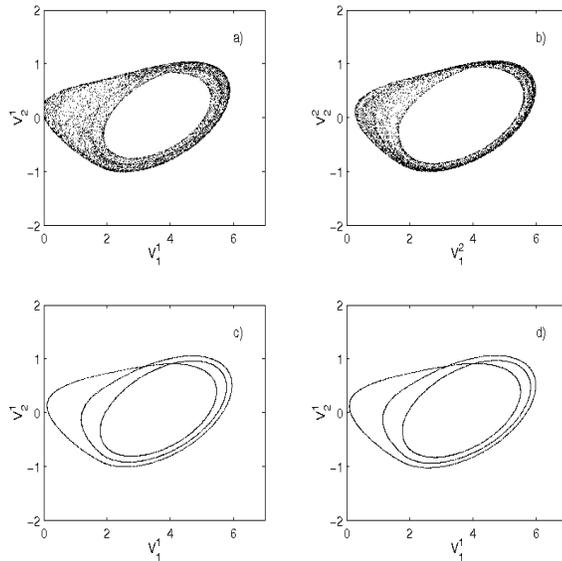


**Fig. 6.2.** En a) y b) los circuitos están no acoplados ( $R1 = 1.740k\Omega$ ,  $R2 = 1.664k\Omega$ ). En c) se muestra las salidas dinámicas ( $V_1$ ,  $V_2$ ) del primero circuito después de acoplado. En d) el primero circuito (no acoplado) está sintonizado al término medio  $(R1 + R2)/2$ .

individuales. No obstante, la *eq.6.15* permite una directa identificación de tal comportamiento colectivo.

Como aplicación, hay que observar el caso en que ambos circuitos operan en regímenes periódicos. La *fig.6.2 (a y b)* muestra el atractor medido resultante de los dos circuitos no acoplados de periodo 3 y 4, respectivamente obtenidos del experimento. En la *fig. 6.2c* se presenta la dinámica que resulta del acoplamiento. Ambos osciladores se comportan caóticamente a través de la desintonía entre sus parámetros, los cuales afectan en muy poca medida a su dinámica individual. Como ha sido supuesto en la *eq. 6.15*, el régimen que se obtiene a partir del acoplamiento fuerte del circuito es el mismo que el que se ha obtenido en la dinámica de un único circuito sin acoplamiento y con el resistor interno sintonizado en el valor medio (ver *fig.6.2d*).

La misma idea puede ser usada para estabilizar órbitas periódicas no estables: se considera el caso en el cual ambos circuitos muestran dinámica caótica cuando se encuentran no acoplados y en el que, además, los valores de los parámetros están localizados en lados opuestos de una ventana periódica. En la *fig. 6.3c* se aprecia que, una vez acoplados, ambos circuitos se sincronizan sobre una órbita de periodo tres.



**Fig. 6.3.** En a) y b) los circuitos no están acoplados ( $R_1 = 1.621k\Omega$ ,  $R_2 = 1.745k\Omega$ ). En c) se muestran las salidas dinámicas ( $V_1$ ,  $V_2$ ) del primer circuito después de acoplado. En d) el primer circuito, no acoplado, está sintonizado al término medio  $(R_1 + R_2)/2$ ,

La posibilidad de obtener una nueva dinámica de manera cuantitativa a través de dos circuitos acoplados con diferentes parámetros internos es robusta con respecto a cambios en la intensidad de acoplamiento (también bajo diferentes modificaciones en los resistores), siempre que ambos resistores de acoplamiento sean lo suficientemente pequeños, o sea, que el acoplamiento sea suficientemente fuerte. Esta robustez ha sido confirmada repitiendo los dos experimentos descritos utilizando valores medios de los resistores de acoplamiento.

Para conducir mejor el sistema a un régimen específico, el experimento también revela que el límite matemático de acoplamiento fuerte infinito puede ser alcanzable en buena aproximación, incluso para valores disponibles de resistencia. También es importante remarcar que para conseguir un determinado régimen, sólo es necesario conocer el diagrama de bifurcación para un circuito aislado: esta información se puede obtener principalmente de una forma experimental y no requiere el conocimiento de la forma de la función  $f$ .

## 6.6 Muerte de la oscilación en un circuito con desintonía en el tiempo característico

En esta sección, nos interesa el régimen colectivo debido a las modificaciones en la intensidad de acoplamiento. En particular, se proporcionará una verificación experimental de muerte de oscilaciones en sistemas caóticos acoplados.

En este régimen la dinámica de cada elemento de la población es suprimida como un efecto colectivo, esto es, resultando de la interacción entre acoplamiento y diversidad. La muerte de la oscilación ha sido previamente descrita en poblaciones de ciclos límites de osciladores con acoplamiento directos [28], [29] o en sistema con retraso [30]. Recientemente el desarrollo del parámetro de orden ha sido usado para demostrar que ese régimen puede aparecer bajo condiciones genéricas en poblaciones de elementos acoplados globalmente con desintonía en el tiempo característico [22].

La ecuación para una población con tiempo característico y acoplamiento global [26], acoplado linealmente puede ser escrita como :

$$\dot{x}_j = \tau_j f(x_j) + K(X - x_j), j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.21)$$

Esta ecuación puede ser vista como una simple forma generalizada del modelo de Kuramoto [13], [22], donde los parámetros de distribución son las frecuencias naturales de los osciladores para diferentes dinámicas individuales desde un ciclo límite. Así, la ecuación para el sistema reducido es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \langle \tau \rangle f(X) + JW, \\ \dot{W} &= \sigma^2 f(X) + [\langle \tau \rangle J - K]W, \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde  $J$  es el jacobiano de  $D_x f(x)$ .

Debido al multiplicador de los parámetros distribuidos en la eq. 6.21, muchos puntos fijos de  $f$  son también fijos en el campo medio [26]. La estabilidad de tal punto fijo, no obstante, puede cambiar debido a la presencia del acoplamiento y de la desintonía en el tiempo característico. Según algunos cálculos se descubre que existen condiciones genéricas bajo las cuales un foco inestable de  $f$  va siendo atraído por la población (ver referencia [22] para mayores detalles). Aquí solamente se justifica que la desintonía del tiempo característico es suficientemente grande, este equilibrio se estabiliza para valores intermedios del acoplamiento, es decir; lo suficientemente grande para evitar incoherencia

y más pequeño que aquellos donde se encuentra la solución a la coherencia no estacionaria.

En el caso del circuito de Chua destaca en la *eq.* 6.16 que la desintonía del tiempo característico puede cambiarse fácilmente a través del capacitor  $C_1$ ,  $C_2$  y la inductancia  $L$ . La escala del tiempo de uno de los circuitos ha sido modificada utilizando condensadores e inductancias que existen en el mercado, así ha sido posible obtener desintonía del 14% en este tiempo. Ambos circuitos, cuando no están acoplados, presentan una dinámica similar (atractor espiral doble) en su evolución temporal, pero con una pequeña diferencia en su frecuencia interna.

El diagrama de bifurcación del sistema reducido (*eq.* 6.22) puede calcularse numéricamente para un intervalo de intensidad de acoplamiento comparable a la dinámica experimental. El diagrama proporciona los regímenes de difusión de los circuitos de Chua acoplados con la desintonía en los tiempos característicos como función de la intensidad de acoplamiento. La desviación estándar  $\delta$  de la distribución del tiempo característico está cercana a 0.14.

Tal como se esperaba de la sección anterior, para valores pequeños del resistor de acoplamiento, los circuitos son arrastrados sobre un atractor caótico indistinguible desde la dinámica no acoplada. No obstante, cuando el acoplamiento se reduce, una cascada de regímenes coherentes bifurcan desde el atractor caótico, y eventualmente se alcanza el estado de muerte de las oscilaciones (*fig.* 6.4). Tal diagrama es independiente de la población en el caso del acoplamiento global difusivo [22].

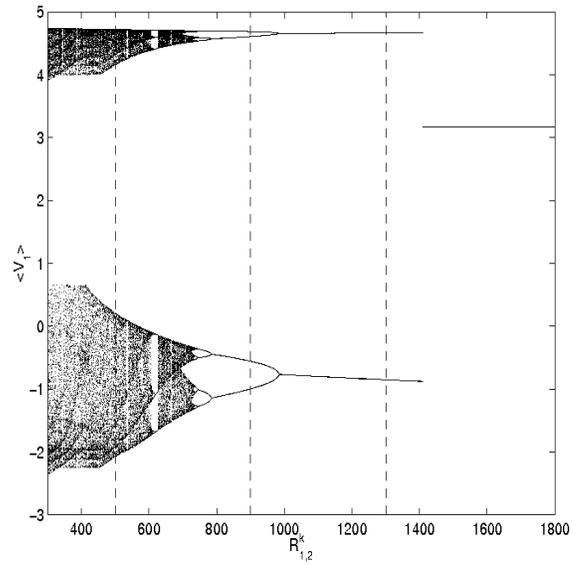
Ahora las resistencias  $R_1^k = R_2^k = R^k$  del circuito acoplado pueden ser modificadas y fijadas en un determinado régimen conocido, de acuerdo con la caracterización numérica del sistema reducido. La *fig.* 6.5 muestra algunas de las dinámicas emergentes observadas en el experimento. El régimen de muerte de la oscilación aparece en el circuito para  $R$  cercana a  $1.5k\Omega$ .

## 6.7 Resumen

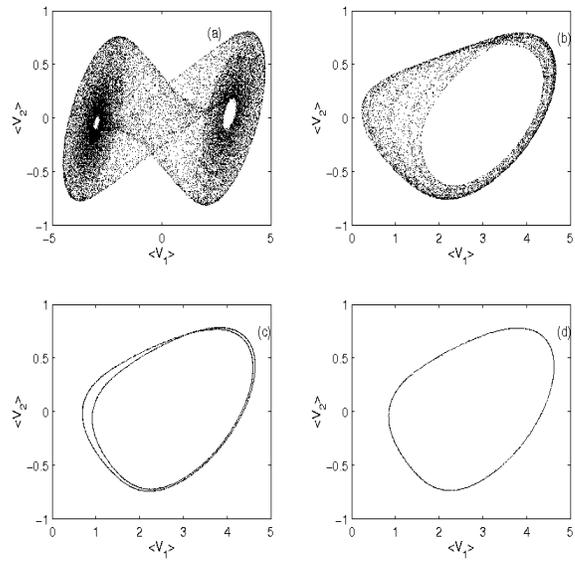
En este capítulo se han estudiado dos circuitos de Chua acoplados simétricamente operando en el régimen caótico con desintonía en sus parámetros en la región de acoplamiento fuerte. Para su análisis se ha utilizado una técnica conocida como desarrollo del parámetro de orden (Order parameter expansion. Ver apartado 6.2).

Los resultados teóricos y las simulaciones numéricas sugieren que este caso es representativo en grandes poblaciones y se convierte en una herramienta para identificar diversidades dependientes de dinámicas coherentes.

En los apartados 6.3 y 6.4 se expuso que la dinámica media de tal sistema acoplado puede ser muy diferente a la dinámica observada en el circuito



**Fig. 6.4.** Diagrama de bifurcación indicando el comportamiento de  $V_1, V_2$  para diferentes acoplamientos  $R$ . Los circuitos poseen diferentes escalas de tiempo .



**Fig. 6.5.** Comportamiento de  $V_1, V_2$  para  $Rc = 0\Omega, 0.5k\Omega, 0.9k\Omega, 1.3k\Omega$ . Los circuitos poseen diferentes escalas de tiempo.

individual no acoplado, y que es posible predecir tal comportamiento colectivo basándose en el conocimiento de la dinámica no acoplada; esto es posible a partir del control de los parámetros de desintonía y acoplamiento. Un ejemplo de cambios cualitativos de comportamiento colectivo, cuando la diferencia entre los circuitos se encuentre en sus tiempos característicos, se ha estudiado el caso de muerte de la oscilación (oscillation death).

La posibilidad de obtener un régimen plenamente coherente específico puede encontrar una amplia aplicación en poblaciones de sistemas no idénticos acoplados.



## 7. Análisis experimental de la sincronización entre tres circuitos Chua

Se estudia experimentalmente los regímenes de sincronización de dos circuitos electrónicos operando en el régimen caótico, cuya dinámica es transmitida por un tercer circuito al que se encuentran acoplados bidireccionalmente en una configuración de cadena lineal. En una larga escala de parámetros operativos, se observa experimentalmente la sincronización entre los circuitos externos, mientras el elemento transmisor permanece no sincronizado. Aquí, las especificaciones de la sincronización difieren con el nivel de acoplamiento. Para baja intensidad de acoplamiento coexiste un estado de sincronización intermitente entre los circuitos externos con una sincronización en antifase. La sincronización se convierte en una sincronización de fase para acoplamientos moderados y para acoplamientos fuertes se observa una sincronización idéntica entre los elementos externos, los cuales están sincronizados entre si y de forma generalizada con el elemento transmisor. En esta última situación el elemento central desarrolla un atractor aspiral triple que no es posible observar cuando el oscilador caótico está aislado. Para la arquitectura de los circuitos de Chua acoplados se han utilizado conexiones ya conocidas en literatura. En el apéndice C se muestran algunos análisis sobre éstas conexiones.

### 7.1 Introducción

La sincronización entre dos de sistemas caóticos ha sido intensivamente estudiada en años recientes [31] en campos como óptica [32] con potenciales aplicaciones tecnológicas, por ejemplo, comunicaciones seguras [33], [34]. Los circuitos electrónicos no lineales, en particular, han impulsado el estudio y entendimiento de la sincronización del caos. Debido a su simplicidad y al hecho de que todas las variables del circuito son accesibles y medibles, los circuitos fueron usados en estudios pioneros de comunicaciones caóticas [35], [36].

Para observar fenómenos propios de la sincronización, se utilizará nuevamente el circuito de Chua operando en el régimen caótico [37]. La sincronización de caos entre dos de estos circuitos acoplados ha sido observada en ambos tipos de acoplamientos, el unidireccional [38], [39] y bidireccional [40]. En el apéndice

C se analizan estos dos tipos de sincronización en dos circuitos de Chua. La arquitectura que aparece en el apéndice C ha servido de base para la construcción de los circuitos acoplados que serán analizados más adelante, y el estudio para un circuito aislado es encontrado en la referencia [41] y en el apéndice B.

Una de las motivaciones para este estudio es el reciente interés que ha surgido en el comportamiento colectivo de elementos dinámicos de red [42]. Dentro de este contexto existe la necesidad de saber cómo la arquitectura de la red determina el comportamiento sincronizado de osciladores caóticos acoplados.

La sincronización en un gran número de circuitos electrónicos acoplados ya ha sido estudiada [43], [44]. Pero incluso la extensión más simple del sistema estándar (dos elementos) formada por una cadena lineal de tres elementos acoplados, muestra escenarios de sincronización no triviales. De esta manera se mostrarán los regímenes de sincronización entre tres circuitos de Chua acoplados en cadena lineal a partir de resultados experimentales.

El acoplamiento del sistema macroscópico se introduce de una forma bidireccional, siguiendo la transferencia de información en ambas direcciones. En este sentido, no hay un claro líder en la dinámica ni un sistema que actúe como un simple seguidor. Todos los circuitos influyen, en cierta medida, la dinámica de los otros. Este tipo de configuración de tres elementos interactuando ha sido investigada tanto teórica como experimentalmente [6], [7] en sistemas láser acoplados.

Estudios sistemáticos del papel del acoplamiento en el comportamiento colectivo del sistema muestran que la intensidad de acoplamiento controla diferentes regímenes de sincronización entre los circuitos. En todos los regímenes observados el circuito central actúa como un retransmisor (“relay”) de la dinámica entre los dos circuitos externos. En particular, como se describirá detalladamente más adelante, se observa:

A) para niveles de bajo acoplamiento coexiste sincronización intermitente y de antifase entre los elementos externos, dependiendo de las condiciones iniciales;

B) para acoplamientos moderados los circuitos externos sincronizan en fase, siendo su dinámica caótica transmitida por el central, que parece permanecer no sincronizado;

C) para alta intensidad de acoplamiento los circuitos externos se sincronizan idénticamente y el central se sincroniza de una forma generalizada. En este régimen el circuito central muestra un atractor espiral triple.

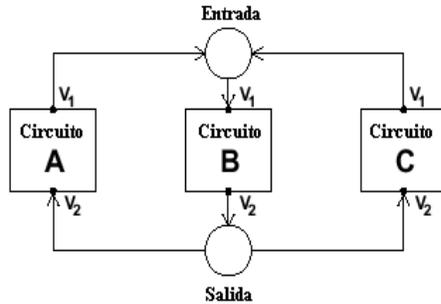


Fig. 7.1. Representación esquemática de la disposición experimental.

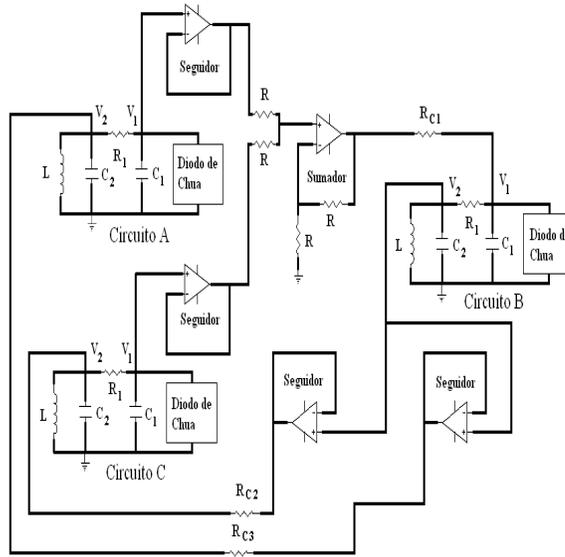
## 7.2 Configuración experimental

Se analiza ahora la sincronización de tres circuitos acoplados de Chua en una configuración de cadena abierta. En la *fig. 7.1* se muestra un diagrama simplificado de la configuración, donde un circuito central  $B$  está acoplado a dos circuitos externos ( $A, C$ ). Los voltajes  $V_1$  o  $V_2$  son enviados a los vecinos más cercanos, de tal forma que se construye un acoplamiento bidireccional sobre dos líneas unidireccionales. En otras palabras, cada circuito envía el estado de una de sus variables, pero al mismo tiempo recibe una entrada a través de otra variable. De esta forma los circuitos se acoplan bidireccionalmente con el circuito central mediando entre los externos.

Para mayores detalles electrónicos en la *fig.7.2* puede observarse el diagrama esquemático que corresponde a lo tres circuitos de Chua acoplados.

Los circuitos externos  $A$  y  $C$ , influyen el circuito central  $B$  a través de la suma de sus salidas dinámicas  $V_1$ , para conseguirlo se conecta un circuito operacional construido en la configuración de un circuito sumador. La intensidad de acoplamiento es controlada ajustando el valor de la resistencia  $R_{c1}$  localizada en la salida del circuito operacional sumador. Al mismo tiempo, la salida  $V_2$  es inyectada desde el circuito central  $B$  a la variable de entrada de los circuitos  $A$  y  $C$ , que viene a través de seguidores de tensión (Buffers), uno para cada circuito externo. La intensidad de acoplamiento se ajusta través de los resistores  $R_{c2}$  y  $R_{c3}$ .

Aquí se usa  $R_{c1} = R_{c2} = R_{c3}$  para garantizar la misma intensidad de acoplamiento en todos los circuitos. Para la construcción de los circuitos de Chua, se utilizaron los siguientes componentes:  $R_1 = 219 \Omega$ ,  $R_2 = 21.92k\Omega$ ,  $R_3 = 2.185k\Omega$ ,  $R_4 = 3.28k\Omega$ ,  $RL = 23\Omega$ ,  $C_1 = 9.8nF$ ,  $C_2 = 99.8nF$ ,  $L = 19.54mH$ ,  $R = 1.73k\Omega$ ,  $CI TL084CN$ . Se ha usado una tarjeta de adquisición de datos para medir el valor de  $(V_1, V_2)$  de cada circuito. La tarjeta tiene una



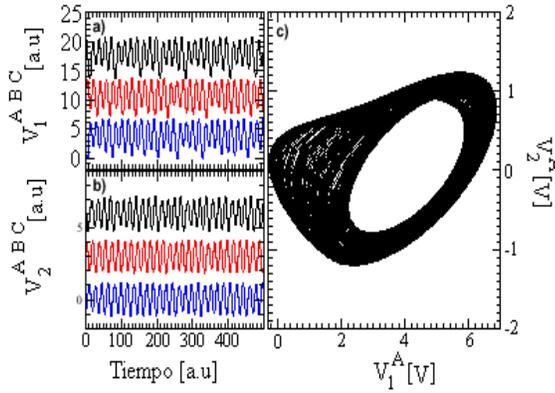
**Fig. 7.2.** Diagrama esquemático de la disposición experimental.

frecuencia de adquisición de  $50kS/s$  por canal y un voltaje de entrada máximo de  $\pm 10V$ .

En estos esquemas, vale la pena destacar que la unidad central está recibiendo dos entradas mientras que los circuitos externos sólo reciben una. En este sentido se podría esperar, razonablemente, diferentes dinámicas entre el circuito central y los externos. Se han sintonizado los parámetros internos de los circuitos con el fin de que muestren dinámicas caóticas en ausencia de acoplamiento. En la *fig. 7.3 (a y b)* está presentada la evolución temporal de las variables de salida  $V_1, V_2$  de cada circuito aislado [*fig. 7.3(a - b)*] y su correspondiente trayectoria en el espacio de fases en el plano  $(V_1, V_2)$  [*fig. 7.3c*]; como muestra la figura, la dinámica de los circuitos aislados corresponde a un atractor caótico espiral simple. En el próximo apartado se estudiará la dinámica emergente a partir de la variación de las intensidades de acoplamiento  $R_{c1}, R_{c2}, R_{c3}$ .

### 7.3 La influencia de la intensidad de acoplamiento

El objetivo es estudiar la influencia de la intensidad de acoplamiento en la sincronización de los circuitos de Chua. Por lo tanto, inicialmente, con los tres circuitos desacoplados, se aumenta la fuerza de acoplamiento disminuyendo

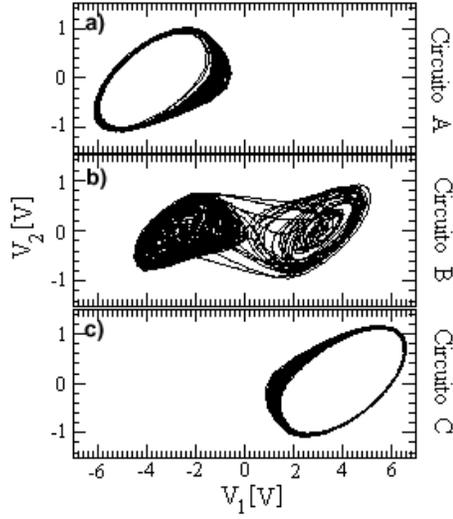


**Fig. 7.3.** En (a) y (b) se muestra la evolución temporal de  $V_1$  y  $V_2$  de los circuitos: cir. A (negro), cir. B (rojo) y cir. C (azul), para  $R_c = 0$ , y en (c) la dinámica del circuito A en el espacio de la fase  $V_1, V_2$  (para A y C es similar).

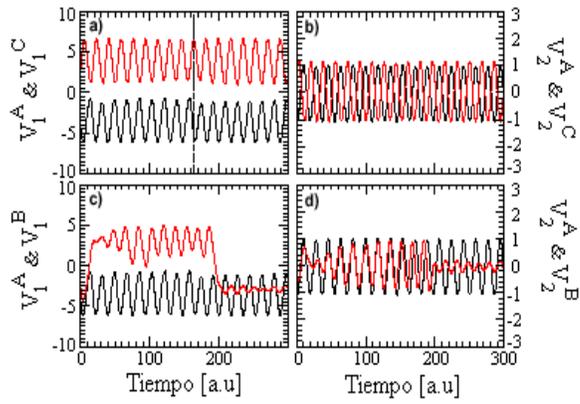
el valor de las resistencias  $R_{c(1,2,3)}$  de acoplamiento puestas en la entrada de cada uno de los circuitos de Chua. Se supone que  $R_{c1} = R_{c2} = R_{c3} = R_c$  para poder garantizar la misma cantidad de acoplamiento entre los circuitos. Cuando  $R_c \approx 20\Omega$  se observa cómo las salidas del circuito de Chua modifican su dinámica. Específicamente se observan diferentes estados que dependen de las condiciones iniciales del sistema.

En la *fig.7.4* está trazada la trayectoria en el espacio de fases para una de las posibles situaciones. En este caso, los dos circuitos externos de Chua A y C, oscilan en un atractor espiral simple alrededor de diferentes puntos fijos inestables. Al mismo tiempo, el circuito central B opera en un atractor caótico espiral doble. Los cambios en las dinámicas inducidas por el acoplamiento fueron los esperados. Conforme ha sido estudiado en el capítulo anterior, la diversidad interna del circuito puede ser la responsable de tales cambios [45].

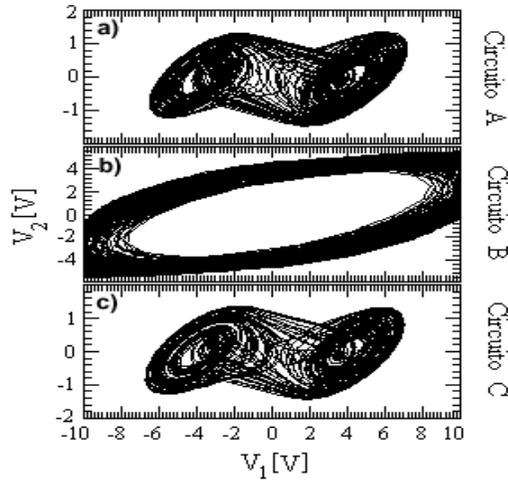
En la *fig.7.5* se pueden observar las series de tiempo de  $V_1$  y  $V_2$  de los tres circuitos de Chua que son graficados de a pares para facilitar las comparaciones entre los sistemas. La *fig. 7.5(a - b)* muestra las salidas A y B, que están claramente en antifase. Además,  $V_1^A$  y  $V_1^B$  tienen diferentes offsets, un hecho que se refleja en la representación del espacio de la fase en forma de oscilaciones alrededor de dos diferentes puntos fijos inestables. Al mismo tiempo, en la *fig. 7.5(c - d)* se detecta cómo los circuitos A y B permanecen no sincronizados, un hecho también visible al comparar la dinámica de los circuitos B y C (no mostrados aquí). Esto es ciertamente un resultado interesante, puesto que el circuito central B transmite un estado de sincronización en antifase para los



**Fig. 7.4.** Espacio de fase  $V_1$ ,  $V_2$  de los circuitos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para  $R_c = 20K\Omega$  (baja itens. de acoplamiento).



**Fig. 7.5.** Comparación en tiempo entre  $V_1$ ,  $V_2$  de los circuitos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para  $R_c = 20K\Omega$ . En a) y b)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro),  $V_2$  del cir.  $C$  (en rojo). En c) y d)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro),  $V_2$  del cir.  $B$  (en rojo).

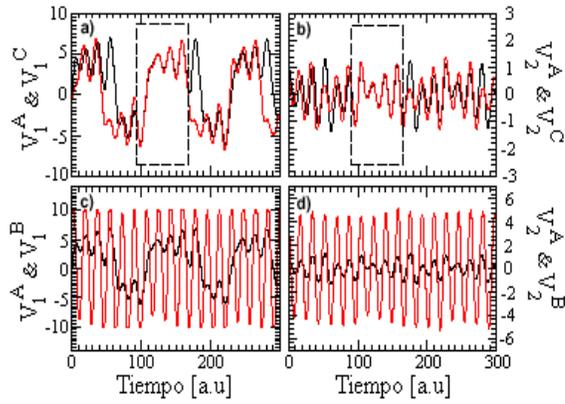


**Fig. 7.6.** Espacio de fases  $V_1$ ,  $V_2$  de los circuitos  $A$ ,  $B$  y  $C$  para  $R = 20K\Omega$ , pero aquí se ha cambiado la condición inicial.

circuitos  $A$  y  $C$  pero su dinámica global permanece no sincronizada o está sincronizada a través de una sincronización generalizada.

Como ya se ha mencionado, el estado de sincronización de antifase descrito coexiste con otros posibles comportamientos del sistema. En diferentes realizaciones del experimento (correspondientes a diferentes condiciones iniciales que pueden obtenerse experimentalmente encendiendo y apagando el sistema), los dos circuitos externos muestran un atractor caótico espiral doble, mientras que el sistema central oscila en un casi ciclo límite (*fig. 7.6*). Se nota que las oscilaciones en el circuito central exceden el valor de  $10V$  que es el límite de la tarjeta de adquisición. Este hecho, que no afecta la dinámica del sistema, limita los valores observables de  $V_1$ .

La *fig. 7.7* muestra las series de tiempos correspondientes a la dinámica de la *fig. 7.6*, revelando episodios de sincronización entre los circuitos de salida  $A$  y  $C$  [graficados en *a* y *b*] mientras que el central realiza oscilaciones casi periódicas y permanece no sincronizado con los circuitos externos  $C$  y  $D$ . Se debe mencionar que mismo que el circuito  $B$  presenta una diferencia cualitativa de su dinámica en comparación con la dinámica de los circuitos  $A$  y  $C$ , el circuito central  $B$  y los externos  $A$  y  $C$  permanecen con diferencia de fase y frecuencia constante en el tiempo. Esto es un indicador de sincronización de fase entre el circuito central  $B$  y los circuitos externos  $A$  y  $C$  [46]. Se atribuye la pérdida de sincronización entre los circuitos externos a la interacción entre el ruido intrínseco de los circuitos electrónicos y el bajo acoplamiento. Como



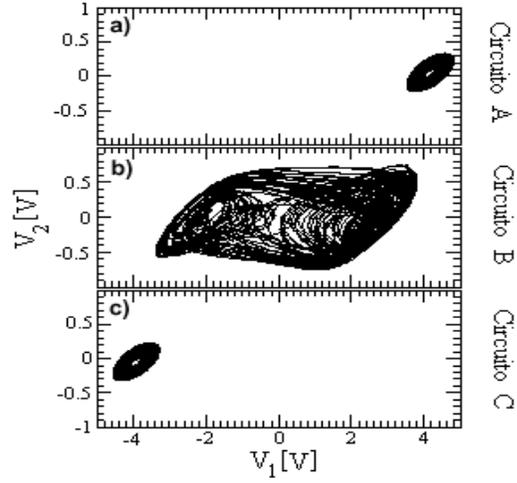
**Fig. 7.7.** Comparación entre  $V_1, V_2$  ( en el tiempo) de los circuitos  $A, B$  y  $C$ . En (a) y (b)  $V_1$  del circuito  $A$  (en negro) y  $V_2$  del circuito  $C$  (en rojo). En (c) y (d)  $V_1$  del circuito  $A$  (en negro) y  $V_2$  del circuito externo  $B$  (rojo).

en el estado anterior, el circuito central actúa como un retransmisor (relay) entre las salidas de los circuitos externos para alcanzar la sincronización, pero no participa en los estados sincronizados entre ellos.

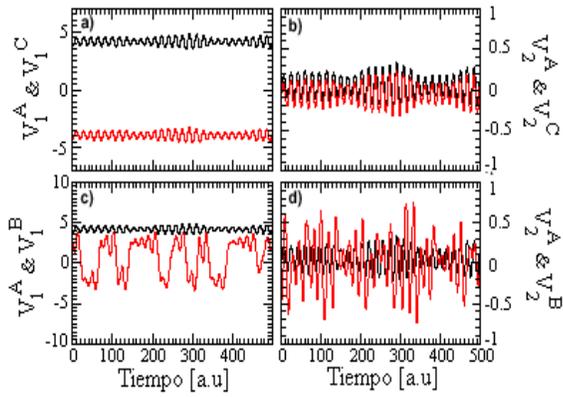
El paso siguiente es aumentar la intensidad de acoplamiento reduciendo la resistencia  $R_c$  de acoplamiento. Para  $R \approx 10\Omega$ , acoplamiento intermedio, la dinámica colectiva cambia cualitativamente. La nueva situación se describe en la *fig. 7.8*. Se advierte que el circuito central desarrolla un atractor caótico espiral doble mientras que los dos circuitos externos desarrollan un atractor. La situación podría parecer similar a uno de los casos anteriores (*fig.7.6, fig.7.7*), puesto que las salidas de los dos circuitos externos oscilan alrededor de dos diferentes puntos fijos inestables, mientras que, al mismo tiempo, el sistema central tiene una trayectoria diferente, como se muestra en el espacio de la fase. Sin embargo las diferencias se presentan a través de una inspección de las series de tiempo mostradas en *fig.7.9*.

En este caso, el circuito  $A$  y  $C$  siguen sincronizados en fase [*fig.7.9 (a-b)*], aunque  $V_1^A$  y  $V_2^C$  tienen diferentes offsets. Este comportamiento sincronizado no fue observado en el caso de bajo acoplamiento, donde los dos circuitos externos tenían dinámicas actuando en antifase. Al mismo tiempo, el circuito central  $B$  actúa como retransmisor (relay) de información, pero permanece no sincronizado con cualquiera de los circuitos externos [*fig.7.9(c-d)*].

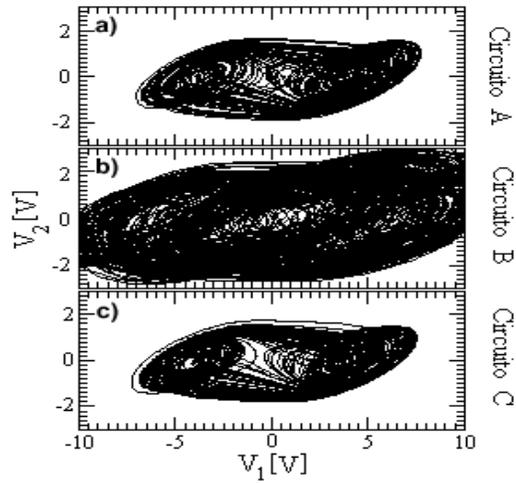
Finalmente, se aumenta el acoplamiento para observar diferencias entre los casos de acoplamiento bajo e intermedio. Para valores de resistencias alrededor de  $R = 2k\Omega$ , que corresponden a acoplamientos razonablemente altos, se



**Fig. 7.8.** Espacio de fases  $V_1, V_2$  de los cir.  $A, B$  y  $C$  para  $R_c = 10k\Omega$ , (acoplamiento intens. media).



**Fig. 7.9.** Comparación entre  $V_1, V_2$  (en el tiempo) de los cir.  $A, B$  y  $C$ , para  $R_c = 10k$ . En a) y b)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir.  $C$  (en rojo). En c) y d)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir. externo  $B$  (rojo).

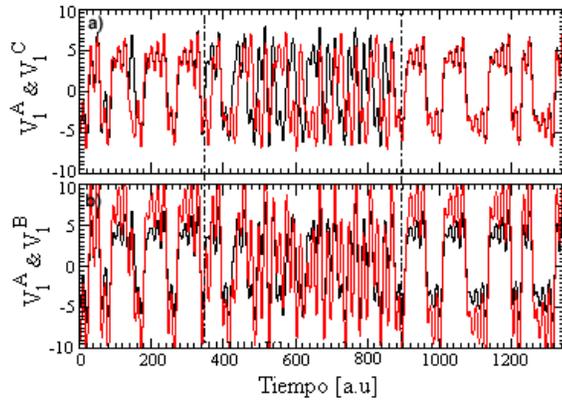


**Fig. 7.10.** Espacio de fases  $V_1$ ,  $V_2$  de los cir.  $A$ ,  $B$  y  $C$  para  $R_c = 2k\Omega$ , (intens. alta de acoplamiento).

detecta un nuevo cambio en la dinámica de los circuitos de Chua. La *fig. 7.10* muestra el espacio de fase de los tres circuitos acoplados.

Se puede observar cómo los circuitos  $A$  y  $C$  tienen un atractor caótico espiral doble similar, que puede indicar la existencia de un cierto grado de sincronización. Destaca que la forma del atractor caótico del central  $B$  es diferente de la de los atractores de los circuitos externos, como en casos anteriores. Específicamente, es un atractor espiral triple, una clase de atractor imposible de obtener en un circuito Chua aislado. De esta manera, esta clase de acoplamiento bidireccional se puede usar como técnica para generar diversos atractores caóticos, como puede apreciarse en la referencia [47]. Un estudio más detallado de la evolución temporal de  $V_1$  y  $V_2$  permitiría explicar la aparición del atractor espiral triple y decidir si la dinámica del sistema está sincronizada o no.

En la *fig. 7.11(a - b)* se representa cómo los circuitos  $A$  y  $C$  poseen sincronización idéntica, es decir  $V_1^A = V_1^C$  y  $V_2^A = V_2^C$ , coexistiendo con ventanas de comportamiento no sincronizado. Al mismo tiempo, la sincronización entre el circuito  $B$  (el que tiene el triple atractor) y los circuitos externos, siguen la expresión  $V_1 = aV_2^A$  y  $V_2^A = bV_2^A$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes (ver la región de sincronización en la *fig. 7.11b*). Como en el caso de los circuitos externos, la sincronización coexiste con estados de comportamiento no sincronizados y esto probablemente sucede durante estos transitorios, cuando el sistema erra dentro de la cuenca central del atractor espiral triple. Esta clase de sincronización se conoce como “sincronización generalizada”.



**Fig. 7.11.** Comparación entre  $V_1$ ,  $V_2$  (en el tiempo) de los cir.  $A$ ,  $B$  y  $C$  para  $R_c = 10k\Omega$ . En a) y b)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir.  $C$  (en rojo). En c) y d)  $V_1$  del cir.  $A$  (en negro) y  $V_2$  del cir. externo  $B$  (rojo).

Se obtienen los mismos resultados al comparar el circuito  $B$  y  $C$  (no mostrados aquí). Éste es un ejemplo experimental de la coexistencia de sincronización generalizada (entre el circuito central y los externos) e idéntica (entre los circuitos externos) en una cadena de osciladores caóticos acoplados.

## 7.4 Resumen

Se ha estudiado la dinámica de tres circuitos acoplados de forma bidireccional y se ha analizado la influencia de la intensidad de acoplamiento en la sincronización de estos osciladores caóticos.

En el apartado 7.1 se ha mostrado la configuración experimental, y más adelante, en el apartado 7.3 se ha estudiado la influencia de la intensidad de acoplamiento en el sistema.

Se observan varias dinámicas de los sistemas directamente relacionadas con la intensidad del acoplamiento, como ejemplos se encuentran: la coexistencia de dos estados dependientes de las condiciones iniciales, la sincronización generalizada, la coexistencia de la sincronización idéntica y la generalizada, y un tipo de atractor (espiral triple) que no es posible obtener en sistemas aislados.



## 8. Conclusión

En esta segunda parte del trabajo se ha estudiado la sincronización bajo dos aspectos:

(i) Comparación con un modelo conocido como desarrollo del parámetro de orden (“Orden expansion parameter”).

(ii) Estudio de la dinámica que emerge de un sistema de tres circuitos de Chua acoplados.

En el capítulo 6 ha sido comentado que, aunque la importancia del comportamiento emergente en poblaciones de sistemas dinámicos está ampliamente reconocida, sólo unos pocos sistemas experimentales ofrecen el necesario grado de control para verificar los resultados teóricos. Así, se ha propuesto la implementación de un circuito con comportamiento coherente conocido de poblaciones con desintonía en los parámetros en la región de acoplamiento fuerte. Los resultados teóricos y simulaciones numéricas sugieren que este caso es representativo en grandes poblaciones y se convierte en una herramienta para identificar diversidades dependientes de dinámicas coherentes.

El sistema experimental que ha sido usado está compuesto por dos circuitos de Chua acoplados simétricamente. La diversidad en sus componentes introduce una desintonía en sus parámetros internos. Se ha demostrado que la dinámica media de tal sistema acoplado puede ser muy diferente a la observada en el circuito individual no acoplado. La expansión del parámetro de orden desarrollado para poblaciones de sistemas dinámicos acoplados fuertemente ha permitido predecir tal comportamiento colectivo basado en el conocimiento de la dinámica no acoplada. Controlando el parámetro de desintonía es posible dirigir el comportamiento del sistema a regímenes dinámicos diferentes.

En el caso de Circuito de Chua, tales regímenes colectivos pueden obtenerse sintonizando el resistor interno de un circuito no acoplado, pero éste no es todo el requerimiento. En otros sistemas la variabilidad de regímenes no acoplados pueden ser mucho más limitados. Para estos casos la interacción de acoplamiento fuerte y desintonía de parámetro puede ser una buena técnica para extender la dinámica fuera de la región de regímenes no acoplados. La posibilidad de acertar plenamente un régimen coherente específico puede encontrar

una amplia aplicabilidad en poblaciones de sistemas no idénticos acoplados; el comportamiento caótico del circuito de Chua es solamente un ejemplo de la dinámica individual. Como segundo ejemplo de cambios cualitativos de diversidad inducida del comportamiento colectivo, se ha dirigido al caso en que los circuitos se diferencian a través de sus tiempos característicos y se ha estudiado el caso de la muerte de oscilaciones .

La coherencia de las dinámicas no es solamente una suposición que permite tratar analíticamente el régimen colectivo sino que también garantiza que los resultados obtenidos para dos circuitos puedan ser extendidos a poblaciones de muchos elementos con una varianza comparable al parámetro de diversidad. La robustez del régimen de acoplamiento fuerte cambia en el número de circuitos que interactúan, hecho que está confirmado a través de simulaciones numéricas. Esto muestra que el comportamiento colectivo es seleccionado de acuerdo con la varianza, más que de la forma real de la distribución del parámetro o del tamaño de la población.

En una segunda parte se ha investigado la dinámica de tres circuitos acoplados de forma bidireccional y se ha analizado la influencia de la intensidad de acoplamiento en la sincronización de estos osciladores caóticos. Para bajas intensidades de acoplamiento se ha observado la coexistencia de dos estados que dependen de las condiciones iniciales. Un estado corresponde a la dinámica de sincronización en antifase de los sistemas externos combinados con la dinámica caótica no sincronizada del circuito central. En el otro estado se ha observado la sincronización entre los sistemas externos mientras que el central desarrolla oscilaciones casi periódicas, actuando como retransmisor (relay) entre los dos sistemas externos. Para acoplamientos intermedios, se ha detectado la sincronización generalizada entre los circuitos de Chua externos, que se obtiene permaneciendo no sincronizado el circuito central. Finalmente, para un valor de acoplamiento más alto, se ha detectado la coexistencia de sincronización idéntica entre los circuitos externos ( $A$  y  $B$ ) y sincronización generalizada entre el circuito central  $B$  y los circuitos externos. Además, se observa el nacimiento de un atractor espiral triple (circuito central  $B$ ), un atractor caótico que no es posible obtener en sistemas aislados.

## 9. Consideraciones finales

Este trabajo está basado en el estudio de sistemas dinámicos no lineales que en las últimas décadas ha tenido gran interés por parte de la comunidad científica. Los sistemas no lineales pueden presentar inestabilidades que en ocasiones conducen a un comportamiento no periódico conocido con el nombre de caos determinista. En particular, un sistema caótico conocido, el circuito de Chua, ha sido el sistema utilizado en todos los capítulos expuestos aquí, debido a las ventajas que presenta cuando se compara a otros sistemas.

En particular se han utilizado circuitos de Chua operando en un régimen caótico como instrumento experimental para la verificación de fenómenos físicos, que debido a la forma de verificación experimental, fueron divididos en dos líneas principales:

La primera es la sincronización del sistema con señales externas que lleva a la observación de los fenómenos de resonancia estocástica, resonancia de coherencia y resonancia fantasma, que son fenómenos donde el elemento estocástico, el ruido, juega el papel principal.

La segunda, ha sido la sincronización entre los propios circuitos de Chua; por un lado se ha estudiado la sincronización entre tres circuitos de Chua mutuamente acoplados en una configuración de cadena lineal donde se ha observado varios efectos dinámicos de interés y, utilizando dos circuitos de Chua mutuamente acoplados se ha estudiado este tipo de sincronización través de una técnica conocida como desarrollo del parámetro de orden; los resultados han indicado que los análisis pueden ser extendidos a grandes poblaciones de sistemas acoplados.

El estudio de estos fenómenos tienen principal aplicación al control de sistemas caóticos y a la generalización de los temas estudiados. Es importante comentar, que aunque la mayoría de los experimentos han sido hechos en el sistema electrónico de Chua también es posible considerar otros sistemas para la investigación del caos, que tal vez podría hacer el trabajo más simple. El criterio seguido por el investigador de estudiar un único sistema ha sido en base a simple metodología pedagógica.

En otro plano, la accesibilidad por parte del investigador al material de investigación de bajo costo ha sido un punto a favor a estudios que pueden ser realizados por investigadores que no tiene acceso a laboratorios sofisticados y caros. Como se ha visto en las dos partes de este trabajo y a través de referencias citadas, son numeroso los ejemplos de procesos físicos, químicos, biológicos y temas que pueden ser investigados dentro del área de dinámica no lineal: la formación de estructuras espacio-temporales, la conducción de impulsos cardíacos, estudios de resonancia en sistemas complejos, la sincronización de sistemas, procesos de reacción-difusión, estudios de sistemas neuronales, son algunos ejemplos ya citados. Bajo esta óptica, este trabajo ha sido un ejemplo más de que la idea de experimentar y consecuentemente investigar con sistemas no lineales es bastante factible y porque no decir accesible. Por ejemplo, para todos los resultados producidos experimentalmente en este trabajo existe la posibilidad de reproducción numérica utilizando un ordenador simple.

Este trabajo también puede ser utilizado como una introducción para los investigadores que pretendan empezar con este tema. Ha habido tres aspectos que han estado presentes en el desarrollo de las comprobaciones experimentales presentadas: las fenomenologías físicas (resonancia estocástica, etc.), las matemáticas (exponentes de Lyapunov, etc.) y la parte técnica (configuración eléctrica de los sistemas, etc.). Estos temas enmarcan actividades de formación que pueden ser dirigidas a través de cursos para nuevos investigadores.

En particular para la formación del autor de este trabajo se le ha exigido conocimiento tecnológico de circuitos electrónicos. A partir de esta base se han estudiado algunos tipos de circuitos utilizados en física no lineal, después se ha extendido el conocimiento a intentos de proyectos de circuitos para observar otras fenomenologías. Con relación a las fenomenologías se han empezado a estudiar temas ya conocidos y luego se han considerado temas direccionados a posibles investigaciones. En la parte matemática ha sido importante el estudio de las metodologías utilizadas para caracterización de los sistemas y fenómenos.

Finalmente, con relación a los frutos de este trabajo, o sea a los artículos publicados, ha sido importante la contribución de los siguientes investigadores, que directamente han contribuido para la formación del investigador: Claudio Mirasso, Raúl Toral, Wojciech Korneta, Silvia De Monte; Francesco d'Ovidio, Oscar Calvo, Javier Martín Buldú, Jordi García-Ojalvo. Y por lo tanto nuevamente agradecerles por su brillante cooperación en las discusiones sobre temas acerca de caos, resonancia, sincronización y sus posibles aplicaciones experimentales.

## Bibliografia

1. Blekhman I.I., Landa P.S., Rozenblum M.G., Appl. Mech. Rev. **48**(11), 733, (1995).
2. L.M. Pecora, T.L. Caroll, Phys. Rev. **64**, 821, (1990).
3. T. Kapitaniak, L.O. Chua, J. Bif. and Chaos **6**, 357, (1996).
4. R. Brown, N.F Rulkov, Chaos **7**(3), 395, (1997).
5. H.G. Winful and L. Rahman, Phys. Rev. Lett. **65**, 1575 (1990).
6. J.R. Terry, K.S. Thornburg, D. J. DeShazer, G.D. Van Wiggeren, S. Zhu, P. Ashwin and R. Roy, Phys. Rev. E **59**, 4036 (1999).
7. I. Fischer R. Vicente, J.M. Buld, M. Peil, C.R. Mirasso, M.C. Torrent, J. Garcia-Ojalvo, Phys. Rev. Let. **97** , 123902 (2006).
8. Chua Circuits: A paradig for Chaos, Ed R. N. Madan, World scien. serie on Non. Scie. serie B, **1**,357, (1993).
9. Synchronization: Theory and Aplication, edited by A. Pikovsky and Y. Maistrenko, (kluwer, Dordrecht) (2003).
10. E. Mosekilde, Y. Maistrenko and D. Postnov, World Scientific, Singapore (2002).
11. S.C. Manrubia, A.S. Mikhailov, and D.H. Zanatte World Scientific, singapore (2004).
12. R.A. Oliva and H. Strogatz, Int. J. Bifurcation Appl. Sci. Eng., **11**, 2359 (2001).
13. Y. Kuramoto, Chemical oscillations, Waves and Turbulence. Springer, Berlin, (1984).
14. I.Z. Kiss, Y Zhai, and J.L. Hudson, Science, **296**, 1676 (2002).
15. A.T. Winfree, The geometry of Biological Time, 2nd ed. Spring, New york (2001).
16. S.Dano, F. Hynne, S.D. Monte, F. d'Ovidio, P.G. Sorensen, and H. Westerhoff, Faraday Discuss, **120**, 261 (2001).
17. V. Osipov and M. M. Sushik, Phys. Rev. E, **58**, 7198 (1998).
18. P.C. Matthews, R.E. Mirollo, and S.H. Strogatz, Physica D, **52**, 293 (1991).
19. M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurths, Phys. Rev. Lett. **76**, 1804 (1996).
20. Y. Kuramoto, International Symposiun on Mathematical Problems in Theoretical Physics, edited by H. Araki, of Lecture Notes in Physics, Springer, New York, **39**, 420(1975).
21. S. De Monte and F. D'Ovidio, Europhys. Lett. **58**, 21 (2002).
22. S. De Monte and F. D'Ovidio and E. Mosekilde, Phys. Rev. Lett. **90**, 054102 (2003).
23. I.Z. Kiss, Y. Zhai, and J.L. Hudson, Phys. Rev. Lett. **88**, 238301 (2002).
24. P. Hadley, M.R. Beasley, and K. Wiesenfeld. Phys. Rev. Rev. B, **38**, 8712 (1988).
25. H. Sompolinsky, D. Golomb, and D. Kleinfeld, Phys. Rev. A, **43**, 6990 (1991).
26. S. De Monte, Collective dynamics in populations with microscopic variability, Phd thesis, The Technical University of Denmark, Dept. of Physics, April (2004).

27. S. De Monte and F. D'Ovidio, H. Chaté, and E. Mosekilde, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 254101 (2004).
28. G.B. Hermentrout and W.C. Troy, *SIAM, J. Math. Anal.* **20**, 1436 (1989).
29. G.B. Hermentrout, *Physica D*, **42**, 219 (1990).
30. F.M. Atay, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 094101 (2003).
31. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares and C.S. Zhou, *Phys. Rep.* **366**, 1 (2002).
32. A. Uchida, F. Rogister, J. García-Ojalvo and R. Roy, *Prog. Optics* **46**, 250 (2005).
33. S. Donati and C.R. Mirasso, *IEEE J. Quantum Electron.* **38**, 1138 (2002).
34. A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I. Fischer, J. García-Ojalvo, C.R. Mirasso, L. Pesquera and K.A. Shore, *Nature* **438**, 343 (2005).
35. L. Kocarev, K.S. Halle, K. Eckert, L.O. Chua and U. Parlitz, *Chaos* **2**, 709 (1992).
36. K.M. Cuomo and A.V. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 65 (1992).
37. R.N. Madan, *Chaos circuit: A paradigm for chaos*, World Scientific (1993).
38. U. Parlitz and I. Wedekind, *Int. J. Bifurcation Chaos* **11**, 2527 (2000).
39. L. Zhu and Y.C. Lai, *Phys. Rev. E* **64**, 045205(R) (2001).
40. B. Canna and S. Cincotti, *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **30**, 625 (2002).
41. M.P. Kennedy, *Frequenz* **46**, 66 (1992).
42. S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez and D.U. Hwang, *Phys. Rep.* **424**, 175 (2006).
43. M.N. Lorenzo, I.P. Mariño, V. Pérez-Muñuzuri, M.A. Matías and V. Pérez-Villar, *Phys. Rev. E* **54**, 3094 (1996).
44. V. Pérez-Muñuzuri and M.N. Lorenzo, *Int. J. Bifurcation Chaos* **9**, 2321 (1999).
45. I. Gomes da Silva, S. Montes, F. d'Ovidio, R. Toral and C.R. Mirasso, *Phys. Rev. E* **73**, 0366203 (2006).
46. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996).
47. G.-Q. Zhong, C. Wu and L.O. Chua, *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **45**, 186 (1998).

## 10. Apéndice A

### 10.1 Características generales de sistemas dinámicos

Se define un sistema dinámico como un conjunto de funciones que especifican cómo las variables evolucionan a lo largo del tiempo. Un sistema de dimensión “ $n$ ” es definido por un conjunto de “ $n$ ” ecuaciones diferenciales de primer orden. El estado de un sistema dinámico en un determinado instante de tiempo es representado por un punto en el espacio  $n$ -dimensional y descrito por los valores en este instante y por las variables del sistema,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

El conjunto de todos los estados posibles que pueden ser alcanzados por un determinado tipo de sistema define un espacio de fase. Una secuencia de los estados a lo largo del tiempo define una curva en este espacio de fase: la trayectoria. A medida que el tiempo aumenta, las trayectorias ocupan todo el espacio de fase o convergen hacia un conjunto de dimensión inferior: el atractor. Los atractores pueden ser sencillos (puntos fijos, ciclos límites, toros), caóticos y/o extraños.

Matemáticamente, un sistema dinámico es descrito como un problema de condición inicial, o sea, para saber cómo se comporta el sistema son necesarias las ecuaciones de evolución de las variables, los valores de los parámetros y las condiciones iniciales.

Un sistema dinámico puede tener una evolución discreta o continua a lo largo del tiempo. El caso discreto es definido por una aplicación  $x_1 = f(x_0)$  que origina el estado  $x_1$  en un instante de tiempo posterior resultante del estado inicial  $x_0$ . El proceso de cálculo del nuevo estado de un sistema discreto es conocido como “iteración”.

El caso continuo es definido por un flujo,  $\vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}_0, t)$ , que origina el estado posterior en el instante  $t$ , dado el estado  $\vec{x}_0$  en el instante  $t = 0$ . Un flujo puede ser diferenciable originando una ecuación diferencial  $d\vec{x}/dt = \vec{F}(\vec{x})$ . En este caso  $\vec{F}(\vec{x})$  es conocido como “vector campo”, un vector que apunta en la dirección de la velocidad en cada punto del espacio de fases. Cuando el vector campo no depende explícitamente del tiempo, el sistema es autónomo. En el

caso en que el vector campo dependa explícitamente del tiempo, el sistema es no autónomo.

Un sistema dinámico puede ser lineal o no lineal; en álgebra, se define linealidad en términos de funciones que poseen las propiedades  $F(x + y) = F(x) + F(y)$  y  $F(ax) = aF(x)$ . La “no linealidad” es definida como negación de la linealidad. Así, las herramientas fundamentales de la simplificación del análisis lineal ya no son válidas; por ejemplo, para un sistema lineal, si tuviésemos dos puntos de equilibrio,  $F(x) = 0$  y  $F(y) = 0$  se obtendría automáticamente un tercer punto de equilibrio  $F(ax + by)$  (de hecho existen infinitos, dado que la linealidad implica que  $F(ax + by) = 0$  para cualquier valor de  $a$  y  $b$ ). Para sistemas no lineales, el cálculo puede ser más complicado.

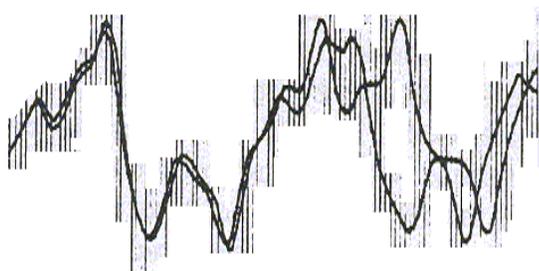
En un sistema lineal existe apenas un conjunto límite constituido por las soluciones del sistema, y el comportamiento constante es independiente de las condiciones iniciales. En un sistema típico no lineal pueden existir varios conjuntos límites o atractores. La condición inicial determina en qué conjunto límite, o atractor, se fija el sistema.

Los sistemas dinámicos no lineales presentan varios resultados bastante complejos de entre los cuales los que presentan caos han sido objeto de varios estudios en las últimas décadas. Los sistemas caóticos son los sistemas que presentan un comportamiento imprevisible a largo plazo originado por un sistema no lineal dinámico determinístico debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Es importante hacer notar que un sistema no lineal dinámico determinista es perfectamente previsible si se tiene un conocimiento perfecto de las condiciones iniciales. La razón de ser imprevisible a largo plazo es una propiedad conocida como la “sensibilidad a las condiciones iniciales”; o sea, dos trayectorias que inicialmente están infinitamente próximas divergen exponencialmente a un ritmo característico del sistema hasta que se tornan completamente descorrelacionadas.

En la práctica, el estado inicial del sistema no puede ser especificado exactamente, sino que dispone de una tolerancia de error  $e > 0$ ; es posible que microscópicamente dos condiciones iniciales  $x_0$  e  $y_0$  que se encuentran separadas al máximo de  $e$ , no puedan ser distinguidas en un corto espacio de tiempo. No obstante, después de un período finito de tiempo, las trayectorias que ambas definen se separan y se tornan macroscópicamente distintas. Estas trayectorias en el espacio de fase definen un atractor y, debido a la imposibilidad de saber cuál es la curva exacta que una trayectoria inicial va a ejecutar se denomina un “atractor caótico”.

Por tanto, se puede considerar en la práctica que por más preciso que sea el conocimiento del estado inicial, el comportamiento a largo plazo es caótico



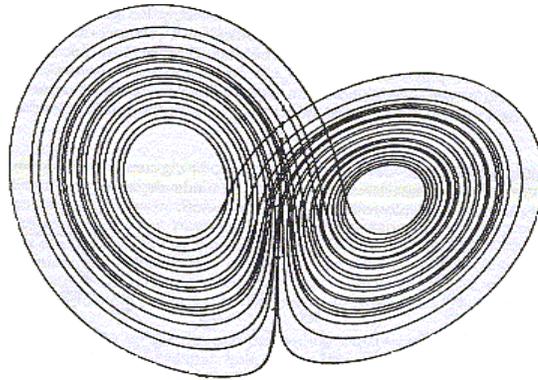
**Fig. 10.1.** Representación de la divergencia de dos trayectorias.

e imposible de predecir. Es esta “no predicción” lo que lleva a confundir un sistema caótico con un comportamiento aleatorio.

Uno de los ejemplos clásicos utilizados como aplicación del caos, aparece cuando el científico Edward Lorenz<sup>1</sup>, meteorólogo del Massachusetts Institute of Technology, trabajaba a principios de los 60 en un modelo de predicción del tiempo. Para ello había desarrollado un sistema de doce ecuaciones, que supuestamente reflejaba el comportamiento del sistema, y lo simulaba con la ayuda de un ordenador. Éste no poseía ni la velocidad ni la memoria precisa para proporcionar una simulación realista de los fenómenos climáticos. A pesar de ello, la máquina señalaba cada minuto el paso de un día, imprimiendo una hilera de números en un papel. La máquina no predecía el tiempo, sino que predecía cómo sería probablemente el tiempo.

En un día de 1961, Lorenz quiso examinar de nuevo una determinada sucesión, e introdujo en el ordenador los números obtenidos directamente de la impresión anterior, pero con sólo tres decimales en lugar de los seis que había estado utilizando hasta entonces. La nueva predicción tenía que haber sido exactamente igual que la anterior, pero no fue así. Al principio Lorenz examinó los dos conjuntos de números y pensó que la máquina se había averiado, como pasaba frecuentemente, hasta que finalmente comprendió lo que había pasado; la divergencia se había producido por el hecho de redondear los decimales en las condiciones iniciales, convencido de que la diferencia era de poca importancia. El resultado está representado en la *fig.10.1*; empezaban aparentemente en el mismo punto, pero las trayectorias divergían una de la otra con el paso del tiempo, hasta que desaparecía cualquier semejanza. Esta es la dependencia sensitiva de las condiciones iniciales.

Lorenz buscó formas más sencillas de producir este comportamiento complejo, y encontró un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales con tres variables. Lorenz se inspiró en la dinámica de fluidos para sus tres ecuaciones,



**Fig. 10.2.** Atractor de Lorenz.

y en concreto en el movimiento de un gas o líquido caliente, lo que se conoce técnicamente como la “convección de Rayleigh – Bénard”.

Haciendo una simulación numérica de este sistema, Lorenz empleó cada variable como coordenada, y el resultado reveló una configuración que para él era bastante extraña, algo como una espiral doble en dos dimensiones, como una mariposa y un par de alas que denotaban un desorden puro, y que hoy es conocido como el atractor de Lorenz<sup>1</sup>, *fig.10.2*.

Entre otras cosas cuando se comparan las *figs.10.1* y *10.2* se observa que, apesar de la dificultad de predecir el comportamiento del sistema caótico en función del tiempo, es posible conocer el comportamiento global de dicho sistema (sistema autónomo).

Existen varios métodos para caracterizar el grado de caos de una señal: las dimensiones del atractor, los exponentes de Lyapunov o la entropía de Kolmogorof son algunos de ellos. Una técnica clásica para analizar los sistemas dinámicos es el mapa de Poincaré<sup>2</sup>. Éste permite una substitución del análisis de flujos de sistemas continuos en el tiempo por un análisis de sistemas discretos, evitándose de esta manera entrar en detalles de cálculo de ecuaciones diferenciales, y al mismo tiempo, permite ilustrar los conceptos importantes de los sistemas dinámicos .

<sup>1</sup> E.N. Lorenz, *Journal of Atmospheric Sciences* **20**, 130 (1963).

<sup>2</sup> H. Poincaré, "Les methodes Nouvelles de Mechanique Celest", New York, Dover (1957).

## 11. Apéndice B

### 11.1 Descripción matemática del sistema de Chua

Un circuito electrónico autónomo de Chua consta de tres elementos que almacenan energía, dos de los cuales son condensadores “ $C_1$ ”, “ $C_2$ ” y el tercero una inductancia “ $L$ ”. También posee una resistencia lineal “ $R$ ” y una resistencia no lineal “ $N_R$ ” denominada “diodo de Chua”, como es mostrado en el diagrama simplificado del circuito de Chua, *fig.11.1* .

Las ecuaciones dinámicas que describen este circuito, que pueden ser obtenidas a través de las leyes Kirchoff , tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L}V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}i_L - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \quad , \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}g(V_1) \end{aligned} \quad (11.1)$$

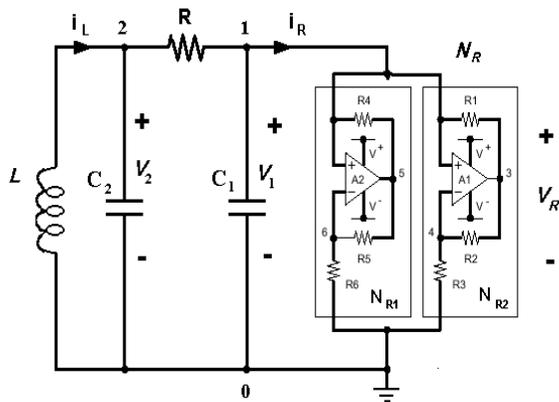


Fig. 11.1. Diagrama simplificado del circuito de Chua.

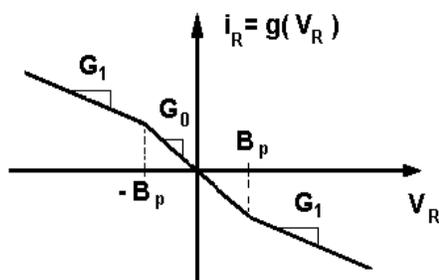


Fig. 11.2. Curva característica del diodo de Chua.

donde  $G = 1/R$ . El componente  $N_R$  se construye utilizando dos amplificadores operacionales interconectados,  $g(V_R)$  es la función característica del componente no lineal  $N_R$ . Debido a la naturaleza no lineal a trozos de  $N_R$  el campo vectorial del circuito se puede decomponer en tres regiones afines, con la función no lineal  $g(V_1)$  definida como

$$g(V_R) = \begin{cases} G_0 + (G_0 - G_1)V_0 & V_1 \geq B_p \\ G_0 V_1 & |V_1| \leq B_p \\ G_0 V_1 - (G_0 - G_1)V_0 & V_1 \leq -B_p \end{cases}, \quad (11.2)$$

o en una forma más compactada

$$g(V_R) = G_1 V_1 + 0.5(G_1 - G_0)(|V_1 + B_p| - |V_1 - B_p|). \quad (11.3)$$

Aquí  $B_p$  es el punto de ruptura y las constantes  $G_1 = -\frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_4}$ ,  $G_0 = -\left(\frac{R_2}{R_1 R_2} + \frac{R_5}{R_4 R_6}\right)$  son pendientes de  $g(V_R)$ . En la *fig.* 11.2 está representada el gráfico de la curva característica del diodo de Chua.

Si uno quiere hacer un trabajo numérico es conveniente normalizar las ecuaciones del circuito según las relaciones.

$$\begin{aligned} x &\approx \frac{V_1}{B_p} & y &\approx \frac{V_2}{B_p} & z &\approx \frac{i_L R_i}{B_p} \\ \tau &\approx \frac{tG}{C_2} & \beta &\approx \frac{C_2}{G^2 L} & \alpha &\approx \frac{C_2}{C_1} \\ a &= 1 - G_0 R & b &= 1 + G_1 R & f(x) &= \frac{g(V_R)}{G B_p} \end{aligned} \quad (11.4)$$

A partir de estas relaciones las ecuaciones normalizadas son escritas en la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)) \\
\frac{dy}{d\tau} &= y - x - z \quad , \\
\frac{dz}{d\tau} &= \beta y
\end{aligned} \tag{11.5}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} bx + (a - b) & x \geq 1 \\ ax & |x| \leq 1 \\ bx - (a - b) & x \leq -1 \end{cases} . \tag{11.6}$$

El sistema de ecuaciones 11.5 es simétrico y de acuerdo con la ecuación 11.6, presenta tres puntos fijos que verifican:

$$y = 0 ; \quad x = -z ; \quad f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b-a}{b} \\ x = 0 \\ x = \frac{a-b}{b} \end{cases} \tag{11.7}$$

la existencia de estos puntos de equilibrio está dada por la condición:

$$G_0 \neq G . \tag{11.8}$$

Se pueden también definir las regiones :

$$D_1 \equiv \{(x, y, z) / x \geq 1\} \quad D_0 \equiv \{(x, y, z) / |x| \leq 1\} \quad D_{-1} \equiv \{(x, y, z) / x \leq -1\} \tag{11.9}$$

Imponiendo que los puntos de equilibrio se encuentran en diferentes regiones, surge una condición adicional para la pendiente del dispositivo  $R$  en la región  $D_0$ :

$$G_1 \geq G . \tag{11.10}$$

De esta forma los puntos de equilibrio serán:

$$\begin{aligned}
P_+ &= (k, 0, -k) \\
P_0 &= (0, 0, 0) \\
P_- &= (-k, 0, k)
\end{aligned} \tag{11.11}$$

donde  $k = \frac{b-a}{b}$ . El sistema de ecuaciones puede expresarse en forma simple:

$$\frac{d\vec{X}}{d\tau} = A(\alpha, \beta, c)\vec{X} / \vec{X} = (x - Q, y, z + Q) \text{ con } Q = \begin{cases} k \text{ en } D_1 \\ k \text{ en } D_{-1} \end{cases} \quad (11.12)$$

donde

$$A(\alpha, \beta, c) = \begin{pmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \text{ siendo } c = \begin{cases} b \text{ en } D_1 \\ a \text{ en } D_0 \\ b \text{ en } D_{-1} \end{cases} \quad (11.13)$$

El sistema de ecuación 11.5 es lineal a trazos, por lo tanto la matriz jacobiana que determina los autovalores, calculada en los puntos de fijos, coincide con la matriz  $A(\alpha, \beta, c)$ .

A partir de estos resultados se pueden analizar las propiedades que presentan los autovalores de la matriz jacobiana tanto en el punto  $P_0$  como en los puntos  $P_{\pm}$  bajo variación de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  positivos y el valor de  $a$  fijado en un valor negativo (verificando la condición 11.10) y  $b$  fijado en un valor positivo (verificando la condición 11.8). Así el polinomio característico de esta matriz 11.13 está dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3 \quad (11.14)$$

siendo

$$P_1 = 1 + \alpha c \quad P_2 = \alpha c + \beta - \alpha \quad P_3 = \alpha\beta c. \quad (11.15)$$

Se puede demostrar que dependiendo de los valores  $\alpha$  y  $\beta$ , el punto de equilibrio  $P_0$  puede asumir las definiciones de "punto de silla" o de foco, y los análisis para  $P_{\pm}$  indican bifurcaciones de Hopf que cuando son supercríticas dan lugar a un ciclo límite estable.

En este análisis se han definido las ecuaciones dinámicas del circuito, y la forma matemática utilizada para analizar el comportamiento en torno de los puntos de equilibrio. En general los resultados teóricos más significativos son aquellos obtenidos numéricamente. Ver la referencia 1 para mayores detalles.

<sup>1</sup> Chua's Circuits: A paradigm for chaos", Ed. Rabiner N. Madan. Word Scientific, Singapore, New Jersey, Hong Kong, Serie B, (1993).

## 12. Apéndice C

### 12.1 Sincronización de caos en un circuito de Chua

Afraid, Verichev, and Rabinovich<sup>1,2</sup> considerando dos sistemas de osciladores idénticos han mostrado el comportamiento caótico con acoplamiento lineal difusivo.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ky - x(1 + q \cos \theta + x^2) + \delta(y' - y) \\ \dot{x}' &= y' \\ \dot{y}' &= -ky' - x'(1 + q \cos \theta + x'^2) + \delta(y - y') \end{aligned}, \quad (12.1)$$

donde  $\delta$  es el parámetro de acoplamiento. Han mostrado que existe un valor crítico  $\delta^*$  con el que, para todo  $\delta > \delta^*$ , los osciladores tienen comportamientos caóticos independientemente de las condiciones iniciales:  $x(t) = x'(t)$  y  $y(t) = y'(t)$ .

La base de la construcción de Pecora and Carrol<sup>2</sup>, se puede describir en la siguiente forma: se consideran dos sistemas autónomos n-dimensional es

$$\frac{du}{dt} = F(u). \quad (12.2)$$

Ahora se divide el sistema en dos subsistemas ( $u = (v, w)$ )

$$\frac{dv}{dt} = G(u, w) \quad \frac{dw}{dt} = H(u, w), \quad (12.3)$$

donde  $v = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $G = (F_1, \dots, F_m)$ ,  $w = (u_{m+1}, \dots, u_n)$  y  $H = (F_{m+1}, \dots, F_n)$ . El próximo paso es crear un nuevo subsistema  $w'$  idéntico a  $w$ . Esto produce un sistema  $(2n - m)$  -dimensional

$$\frac{dv}{dt} = G(u, w) \quad \frac{dw}{dt} = H(u, w) \quad \frac{dw'}{dt} = H(u, w'). \quad (12.4)$$

El sistema  $v - w$  es conocido como sistema transmisor (conductor), y el sistema  $w'$  es el subsistema respuesta. Si  $w'$  converge asintóticamente para  $w$  y continua en la misma trayectoria que  $w'$  entonces se dice que están sincronizados. Los exponentes de Lyapunov de la respuesta del sistema son llamados “exponentes de Lyapunov condicionales”. Pecora y Carrol han mostrado que la condición necesaria y suficiente para que la trayectoria caótica  $w$  sea asintóticamente estable ocurre si los exponentes de Lyapunov son negativos.

En este apartado se muestran algunos análisis matemáticos de acoplamiento electrónico básico para el circuito de Chua utilizado en la segunda parte del trabajo.

Según la *fig.11.1* (Apéndice B) las ecuaciones del circuito de Chua obtenidas a través de la ley de Kirchoff son

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1} (V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1} g(V_1) \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} i_L - \frac{G}{C_2} (V_2 - V_1) \quad , \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2 \end{aligned} \quad (12.5)$$

donde  $g(v_1) = G_1 V_1 + 0.5 (G_1 - G_0) (|V_1 + B_p| - |V_1 - B_p|)$  es el elemento no lineal. Utilizando la siguientes relaciones

$$\begin{aligned} x &\approx \frac{V_1}{B_p} & y &\approx \frac{V_2}{B_p} & z &\approx \frac{i_L r_i}{B_p} \\ \tau &\approx \frac{tG}{C_2} & \beta &\approx \frac{C_2}{G^2 L} & \alpha &\approx \frac{C_2}{C_1} \\ a &= 1 - G_0 R & b &= 1 + G_1 R & f(x) &= \frac{g(V_1)}{G B_p} \end{aligned} \quad (12.6)$$

las ecuaciones del circuito pueden ser escritas en forma adimensional

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha (y - x - f(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} &= y - x - z \quad , \\ \frac{dz}{d\tau} &= \beta y \end{aligned} \quad (12.7)$$

donde  $f(x) = bx + 0.5 (a - b) \{|x + 1| - |x - 1|\}$ . El otro sistema está representado por  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , con ecuaciones del mismo estado que la ecuación 12.7. De esta forma es posible definir un sistema diferencia:

$$\begin{aligned}
 p(\tau) &= x(\tau) - x'(\tau) \\
 q(\tau) &= y(\tau) - y'(\tau) \\
 r(\tau) &= z(\tau) - z'(\tau)
 \end{aligned} \tag{12.8}$$

Para investigar la sincronización idéntica de los circuitos, en este caso se ha fijado el circuito de forma que presenta el atractor espiral doble, esto corresponde a los parámetros:  $C_1 = 10nF$ ,  $C_2 = 100nF$ ,  $L = 18.75mHz$ ,  $G = 0.599m\frac{A}{V}$ ,  $G_b = -0.41m\frac{A}{V}$ ,  $G_a = -0.76m\frac{A}{V}$ . Consecuentemente  $\alpha = 10.0$ ,  $\beta = 14.87$  y las ecuaciones para el sistema acoplado bidireccionalmente es dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)) + \delta_x(x' - x) \\
 \frac{dy}{d\tau} &= y - x - z + \delta_y(y' - y) \\
 \frac{dz}{d\tau} &= \beta y + \delta_z(z' - z)
 \end{aligned} , \tag{12.9}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dx'}{d\tau} &= \alpha(y' - x' - f(x')) + \delta_x(x - x') \\
 \frac{dy'}{d\tau} &= y' - x' - z' + \delta_y(y - y') \\
 \frac{dz'}{d\tau} &= \beta y' + \delta_z(z - z')
 \end{aligned}$$

donde  $\delta$ , es la variable de acoplamiento. Por lo tanto para  $\delta_x, \delta_y, \delta_z = 0$  el sistema está no acoplado.

**Proposición 1.** Se supone que existen valores para  $(\delta_1, \delta_2)$  que obedecen  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ , donde  $\delta$  denota  $\delta_x, \delta_y$  o  $\delta_z$ , y la parte real de todos los autovalores de la matriz 12.10 y 12.11 son negativos

$$\begin{bmatrix} -\alpha - a\alpha - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix}, \tag{12.10}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha - a\alpha - 2\delta_x & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - 2\delta_y & 1 \\ 0 & -\beta & -2\delta_z \end{bmatrix}. \tag{12.11}$$

Entonces los subsistemas  $(x, y, z, x', y', z' : x = x', y = y', z = z')$  en el espacio de fases  $R^6$  de la eq.12.9 son estables para todo  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ . En este sentido todas las trayectorias de ambos sistemas se aproximan asintóticamente.

**Prueba:** Desde 12.8 y 12.9 se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \alpha q - \alpha p - \alpha[f(x) - f(x')] - 2\delta_x p \\
\dot{q} &= p - r - 2\delta_y p \\
\dot{r} &= -\beta q - 2\delta_z r
\end{aligned}
\tag{12.12}$$

así  $f(x) - f(x') = f(\eta)(x - x')$  y  $f'(\eta)$  asume valores  $a$  y  $b$  y 12.12 se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},
\tag{12.13}$$

donde la matriz  $A$  es dada a través de cualquiera de las matrices de la proposición 1. Si la parte real de los autovalores de esa matriz son negativos, consecuentemente el equilibrio en 12.12 es estable.

**Observación:** Este teorema solamente da condición suficiente para la sincronización, esto no significa que si no se encuentra  $\delta_1$  y  $\delta_2$  el sistema no pueda ser sincronizado<sup>3</sup>. A seguir se presenta un ejemplo para el sistema acoplado en la variable  $X$ .

### 12.1.1 Sistema acoplado en la variable $X$

La *fig.12.1* muestra un diagrama esquemático del circuito experimental. Las ecuaciones adimensionales para este circuito serán por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)) + \delta_x(x' - x) \\
\frac{dy}{d\tau} &= y - x - z \\
\frac{dz}{d\tau} &= \beta y \\
\frac{dx'}{d\tau} &= \alpha(y' - x' - f(x')) + \delta_x(x - x') \\
\frac{dy'}{d\tau} &= y' - x' - z' \\
\frac{dz'}{d\tau} &= \beta y'
\end{aligned}
\tag{12.14}$$

donde  $\delta_x = R\alpha R_x$ . El sistema diferencia es por lo tanto

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \alpha q - \alpha p - s_i \alpha p - 2\delta_x p \\
\dot{q} &= p - q + r \\
\dot{r} &= -\beta q
\end{aligned}
\tag{12.15}$$

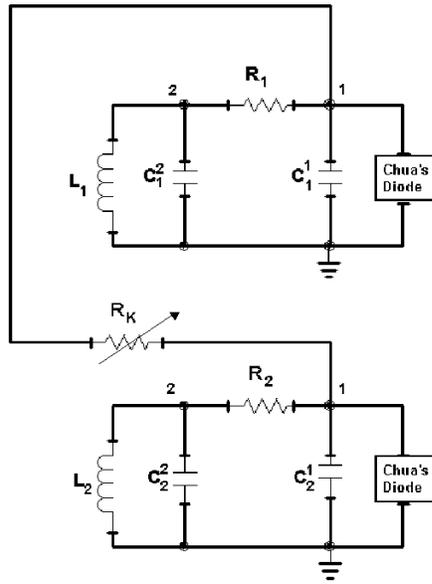


Fig. 12.1. Diagrama esquemático de la configuración experimental.

o también

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - s_i \alpha - 2\delta_x & -\alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (12.16)$$

donde  $S_i = a, b; i = 1, 2$  (según lo que se puede deducir a través de la proposición 1). La ecuación característica es

$$\lambda^3 + (\alpha + s_i \alpha + 2\delta_x + 1)\lambda^2 + (s_i \alpha + 2\delta_x + \beta)\lambda + \beta(\alpha + s_i \alpha + 2\delta_x) = 0 \quad (12.17)$$

o simplemente

$$\lambda^3 + k\lambda^2 + \rho\lambda + \sigma = 0. \quad (12.18)$$

Si  $\delta > 0, \rho > 0, y k\rho - \sigma > 0$ , entonces  $p = q = r = 0$  es un punto estable y los subsistemas se sincronizan. En este estudio se ha utilizado  $\delta_1 = 5.56$  y así para todo  $\delta > 5.56$  el subsistema se sincronizará. Para valores de  $\delta$  por debajo de este valor, el teorema no enmarca predicción; la evidencia experimental

y numérica<sup>1</sup> indica que el circuito se sincronizará para  $\delta > 0.5$ . Se pueden desarrollar análisis similares para las variables  $y$  y  $z$ . Ver las referencias en el final del apéndice para mayores detalles.

## 12.2 Sincronización a través del control continuo de la respuesta de un sistema.

Pecora y Carroll<sup>3</sup> han mostrado que los subsistemas sincronizan si los exponentes de Lyapunov condicionales son negativos. Hay un método simple para ver si los exponentes condicionales de Lyapunov son negativos, dado que el subsistema es lineal. Haciendo  $\xi(t) = w(t) - w^i(t)$ , y siendo  $\xi$  el sistema diferencia, entonces se obtiene

$$\dot{\xi}(t) = \dot{w}(t) - \dot{w}^i(t) = h(v, w) + h(v, w^i). \quad (12.19)$$

Si el subsistema es lineal se consigue otra ecuación

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t), \quad (12.20)$$

donde  $A$  es una matriz constante  $(n-m) \times (n-m)$ . Se supone que los autovalores de  $A$  son  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-m})$ . La parte real de estos autovalores son por definición los autovalores condicionados de Lyapunov que se busca.

Si todos los exponentes de Lyapunov condicionados son negativos entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0$  y en consecuencia los subsistemas sincronizan; si existen exponentes de Lyapunov condicionados positivos, los subsistemas evolucionarán separados cuando  $t \rightarrow \infty$ , y nunca se sincronizarán<sup>1</sup>.

Un caso intermedio ocurre si uno o más de los exponentes de Lyapunov condicionados son iguales a cero, pero ninguno positivo; como  $t \rightarrow \infty$  los sistemas se separarán por una distancia  $B$  fija, dependiente de las condiciones iniciales. Si los subsistemas son circuitos lineales con elementos pasivos, calcular los exponentes de Lyapunov condicionado no es complicado. Si los subsistemas son no lineales los exponentes de Lyapunov no son determinados tan fácilmente.

Se ejemplificará la conexión unidireccional para una de las tres posibilidades de acoplamientos. Ver la referencia 1 (final del apéndice) para mayores detalles acerca del lo que fue expuesto.

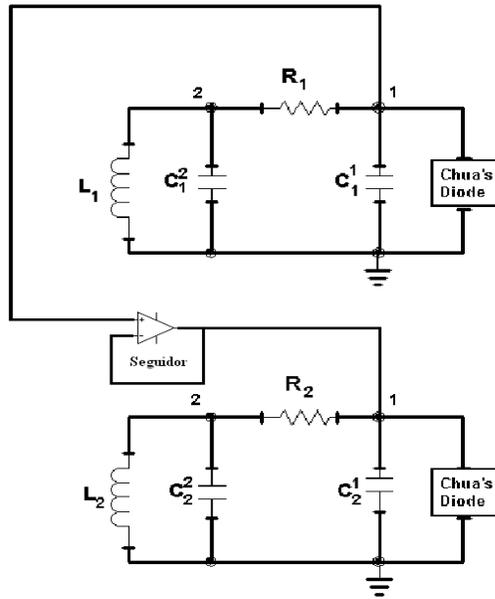


Fig. 12.2. Diagrama esquemático de la configuración experimental.

### 12.2.1 Acoplamiento en la variable X

La fig.12.2 muestra el diagrama experimental "acoplado unidireccionalmente"

<sup>1</sup>. Las ecuaciones de estado son

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)) \\
 \dot{y} &= \alpha(y - x - z) \\
 \dot{z} &= -\beta y
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \dot{y}' &= \alpha(y' - x' - z') \\
 \dot{z}' &= -\beta y'
 \end{aligned}
 \quad , \quad (12.21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}, \quad (12.22)$$

los autovalores son  $1/2 + j1/2\sqrt{4\beta - 1}$  resultando

$$\xi(t) = e^{-\tau/2} \left( C \cos \left( \sqrt{4\beta - 1}/2 \right) \tau + D \sin \left( \sqrt{4\beta - 1}/2 \right) \tau \right), \quad (12.23)$$

donde  $C$  y  $D$  son constantes de integración. En base a la referencia los exponentes de Lyapunov condicionados son  $(-0.5, -0.5)$ , y debido a que el  $\lim_{t \rightarrow 0} \xi(t) = 0$ , los subsistemas se sincronizan. Se pueden desarrollar análisis similares para las variables  $y$  y  $z$ .

Una extensión para la misma configuración experimental y que obedece las mismas predicciones teóricas hechas aquí está mostrada en la *fig.12.3* que utiliza un resistor variable  $R$  para controlar la intensidad de acoplamiento  $k$ , así  $k = 1/R$ . Se han observado tanto numérica como experimentalmente las diferentes fases de sincronización mediante la variación de  $R$ .

En la *fig.12.4* se muestra un ejemplo numérico de los resultados que pueden obtenerse mediante este estudio. Se han observado resultados para todas las configuraciones de los circuitos acoplados comentados aquí. Ver la referencia 1 y 3 (final de este apartado) para mayores detalles acerca del lo que fue expuesto.

<sup>1</sup> Chua's Circuits: A paradigm for chaos", Ed. Rabiner N. Madan. Word Scientific, Singapore, New Jersey, Hong Kong, Serie B, p. 137, (1993).

<sup>2</sup> V.S Afraimovich, N. N. Verichev, and M.I Rabinovich, "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems", Izv. VUZ. Rasiofiz. RPQAEC. **29**, 795, (1986).

<sup>3</sup> L.M. Pecora and L.M. Carroll, "Driving system with chaotic signals", Phys. Rev. A **44**, 2374, (1991).

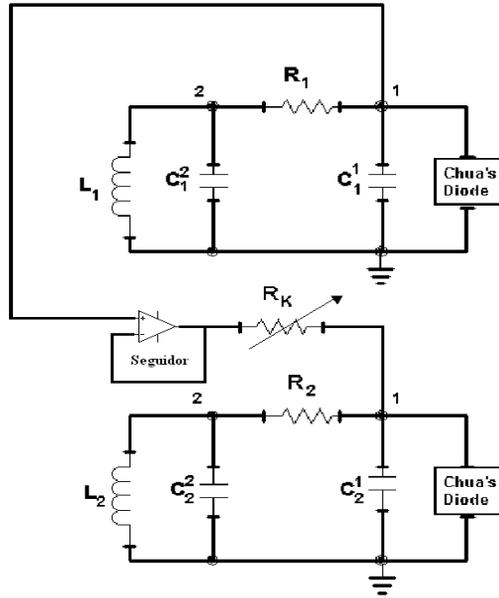


Fig. 12.3. Diagrama esquemático de la configuración experimental.

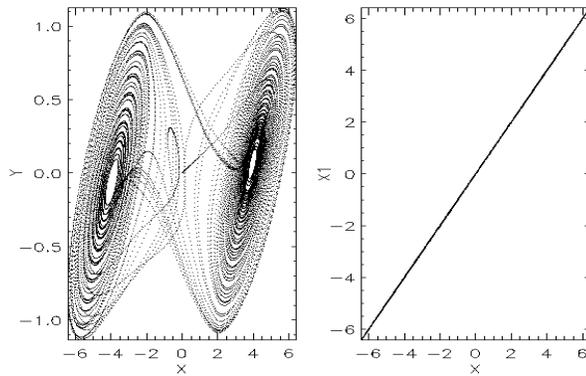


Fig. 12.4. Atractor espiral doble (izquierda) y línea de sincronización (derecha).